

Zur Konzeption des Hilbertprogramms

Im ersten Teil dieses Buches soll die konzeptionell-begriffliche Seite des Hilbertprogramms (HP) erörtert werden. Es wird darum gehen, was die Ziele dieses Forschungsprogramms sind und in welchen Schritten es vorgehen will, um diese Ziele zu erreichen. Welche philosophische Sicht der Mathematik führte Hilbert zu seinem Programm? Welche konkurrierenden Sichtweisen wollte er zurückdrängen? Welche mathematischen, logischen und philosophischen Ressourcen nimmt das Programm in Anspruch?

Der nachfolgend präsentierte Zugang ist im Wesentlichen aus meiner kritischen Beschäftigung mit Hilberts eigenen Schriften hervorgegangen. Es wird bewußt keine vorgefertigte philosophische Rahmentheorie zugrundegelegt, sondern versucht, eine möglichst unvoreingenommene Auseinandersetzung zu führen. Methodisch wird dabei der Ansatz verfolgt, die Behauptungen der Protagonisten des HP solange stark zu machen, bis wirklich keine stützenden Erklärungen mehr in Sicht sind. Es ist erstaunlich, wie weit man damit kommen kann.

Das erste Kapitel beginnt mit einer grundsätzlichen Bestimmung dessen, was hier unter dem „Hilbertprogramm“ verstanden wird, und bietet eine erste Bestimmung seiner Ziele (Kap. 2). Seine wichtigste sachliche Voraussetzung wird im zweiten Kapitel behandelt: die Axiomatik. Hilberts Auseinandersetzungen mit Frege lassen hervortreten, was das konzeptionell Neue an Hilberts Verständnis von Axiomatik ist. Eine Diskussion von Kriterien für Axiome hebt dann besonders auf den zentralen Begriff der Widerspruchsfreiheit ab (Kap. 3).

In der klassischen Trias mathematikphilosophischer Positionen – „Logizismus, Intuitionismus, Formalismus“ – gilt der Formalismus gemeinhin als die Position Hilberts. Da man mit von Neumann festhalten muß, daß es für das Verständnis der Hilbertschen Position unerläßlich ist, die beiden anderen Positionen zu kennen, werden zunächst Logizismus und Intuitionismus als Kontext des HP behandelt (Kap. 4). Es zeigt sich, daß die Vorstellung, es handle sich bei ihnen um ausschließende Alternativen zu Hilberts Formalismus, genau so fragwürdig ist wie die undifferenzierte Etikettierung seiner Position als „formalistisch“ (Kap. 5).

Schließlich wird es in dem Kapitel zum Finitismus um das eigentliche Proprium der Hilbertschen Theorie gehen: die finit begründeten metamathematischen Methoden (Kap. 6). Ihre Behandlung bildet die Voraussetzung für die im zweiten Teil des Buches angesetzte Analyse von Widerspruchsfreiheitsbeweisen der Hilbertschule.

Die vorliegende Darstellung weicht in zwei Punkten bewußt von den aus der Literatur geläufigen Darstellungen ab. Die *erste Abweichung* betrifft die ideal/real-Unterscheidung. In der Literatur wird das Hilbertprogramm meistens im Ausgang von dieser Unterscheidung dargestellt. Oft wird nicht darauf geachtet, daß es sich dabei um eine Analogie handelt, die Hilbert nur ins Spiel gebracht hat, um gewisse Züge seiner Konzeption zu verdeutlichen. Nimmt man diese Analogie als Aufhänger der Gesamtkonzeption, so droht die Gefahr der Überbeanspruchung: Man nimmt wörtlich, was nicht wörtlich gemeint war, und hat keinen Blick mehr für die Grenzen der Analogie. So ergeben sich teilweise gravierende Mißverständnisse. Hier wird die ideal/real-Unterscheidung daher zunächst ausgeblendet, um dann, in einem eigenen Kapitel nach den konzeptionellen Erörterungen, eine Klärung zu versuchen, was mit der Analogie ausgesagt werden kann und wo ihre Grenzen liegen (Kap. 7).

Die *zweite Abweichung* besteht gegenüber der Darstellung in Michael Detlefsens einschlägiger Monographie *Hilbert's Program* (DETLEFSEN, *Hilbert's Program* [1986]). Sie betrifft den Instrumentalismus, in dessen Rahmen Detlefsen das Hilbertprogramm darstellt. Da die instrumentalistische Lesart des HP nicht überzeugend ist, werden die betreffenden Punkte zunächst ausgespart und dann in einem eigenen Kapitel am Ende des ersten Teils behandelt (Kap. 8).