

Springer-Lehrbuch

Wolfgang Kohn • Riza Öztürk

Mathematik für Ökonomen

Ökonomische Anwendungen
der linearen Algebra und Analysis
mit Scilab

Zweite, überarbeitete und ergänzte Auflage



Springer Gabler

Prof. Dr. Wolfgang Kohn
Prof. Dr. Riza Öztürk
Fachhochschule Bielefeld
Fachbereich Wirtschaft und Gesundheit
Bielefeld, Deutschland

ISSN 0937-7433

ISBN 978-3-642-28574-5

ISBN 978-3-642-28575-2 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-28575-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2010): 9101, 91B02, 91B26, 9701

Springer Gabler

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009, 2012

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Gabler ist eine Marke von Springer DE.

Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media

www.springer-gabler.de

Für unsere Familien
und unsere Eltern

Vorwort

Vorwort zur 2. erweiterten und verbesserten Auflage

Wir haben den Text um die Kapitel Mengenlehre und Aussagenlogik erweitert. Das Buch um diese Grundlagen zu erweitern erschien uns aufgrund der Erfahrungen aus der Lehre sinnvoll. Ferner haben wir versucht den Text an einigen Stellen besser zu formulieren, klarer zu gliedern und Fehler zu bereinigen, die leider immer auftreten. Wir hoffen keine neuen erzeugt zu haben.

Bielefeld, Januar 2012

Wolfgang Kohn und Riza Öztürk

Vorwort zur 1. Auflage

In diesem Buch haben wir mathematische Grundlagen für Ökonomen zusammengefasst. Formale Definitionen, Beweise und mathematische Sätze befinden sich kaum im Text, wohingegen eine Herleitung von Formeln oft erfolgt, die hoffentlich zu ihrem besseren Verständnis führen. In der Anwendung stehen betriebswirtschaftliche Aspekte im Zentrum.

Zeitgemäß werden aufwändigere Rechnungen mit einem Computerprogramm durchgeführt. Das hier verwendete *open source* Programm **Scilab** besitzt hervorragende numerische Eigenschaften und ermöglicht die einfache Umsetzung der Formeln, insbesondere in der linearen Algebra. In diesem Programm können auch Vektoren oder Matrizen Variablen sein. Dies ist ein großer Vorteil, wenn man die Rechnungen nachvollziehen möchte. An geeigneten Stellen im Text werden die Programmbefehle für einzelne Berechnungen beschrieben. Natürlich eignen sich auch andere Programme wie zum Beispiel **Excel**, **Maple** oder **Mathematica** für die Berechnungen. **Scilab** (siehe www.scilab.org) steht für verschiedene Betriebssysteme zur Verfügung.

Teil I enthält einige Grundlagen der Mathematik, Teil II führt in die lineare Algebra und deren ökonomischen Anwendungen ein. In Teil III wird die Analysis mit Finanzmathematik, Differentialrechnung und Integralrechnung behandelt. Im Anhang

(Teil IV) wird kurz das Programm **Scilab** beschrieben. Ferner finden sich dort die Lösungen zu den Übungen aus den vorangegangenen Kapiteln.

Die Kapitel 4 bis 10 und 11 (mit Einschränkung) bilden das Programm für einen vier Semesterwochenstunden (SWS) umfassenden Kurs in einem betriebswirtschaftlich orientierten Bachelorstudiengang mit einem Arbeitsäquivalent von 5 europäischen Arbeitspunkten (ECTS). Die Kapitel 3, 10 und 11 sind in Kombination mit weiterführenden Themen für einen Masterstudiengang geeignet.

Besonderer Dank gebührt Diplom-Volkswirtin Coco Rindt, Prof. Dr. Rainer Lenz und Dr. Wolfgang Rohde, die mit vielen Korrekturen und guten Verbesserungen zum Gelingen des Buches beitrugen.

Bielefeld, Mai 2009

Wolfgang Kohn und Riza Öztürk

Inhaltsverzeichnis

Teil I Grundlagen

1	Mengenlehre und Aussagenlogik	3
1.1	Vorbemerkung	3
1.2	Mengen	4
1.2.1	Mengenoperationen	6
1.2.2	Mengesetze	9
1.2.3	Zahlenmengen	12
1.3	Aussagenlogik	13
1.3.1	Logikoperatoren	13
1.3.2	Regeln	15
1.3.3	Gesetze der Logik	16
1.4	Fazit	18
2	Besondere mathematische Funktionen	19
2.1	Vorbemerkung	19
2.2	Summenzeichen	20
2.3	Produktzeichen	23
2.4	Betragsfunktion	23
2.5	Ganzzahlfunktion	24
2.6	Potenzen und Wurzeln	25
2.7	Exponentialfunktionen	27
2.8	Logarithmen	30
2.9	Anwendung in Scilab	33
2.10	Fazit	35
3	Kombinatorik	37
3.1	Vorbemerkung	37
3.2	Fakultät und Binomialkoeffizient	38
3.2.1	Fakultät	38
3.2.2	Binomialkoeffizient	38

3.2.3	Definition des Binomialkoeffizienten in Scilab	40
3.3	Permutation	40
3.3.1	Permutation ohne Wiederholung	41
3.3.2	Permutation mit Wiederholung	41
3.4	Variation	42
3.4.1	Variation ohne Wiederholung	42
3.4.2	Variation mit Wiederholung	44
3.5	Kombination	44
3.5.1	Kombination ohne Wiederholung	44
3.5.2	Kombination mit Wiederholung	45
3.6	Fazit	48

Teil II Lineare Algebra

4	Vektoren	51
4.1	Vorbemerkung	51
4.2	Eigenschaften von Vektoren	52
4.3	Operationen mit Vektoren	54
4.3.1	Addition (Subtraktion) von Vektoren	54
4.3.2	Skalares Vielfaches eines Vektors	54
4.4	Geometrische Darstellung von Vektoren	55
4.5	Linearkombinationen und lineare Abhängigkeit von Vektoren	55
4.6	Linear unabhängige Vektoren und Basisvektoren	56
4.7	Skalarprodukt (inneres Produkt)	58
4.8	Vektoren in Scilab	61
4.9	Fazit	62
5	Matrizen	63
5.1	Vorbemerkung	63
5.2	Einfache Matrizen	63
5.3	Spezielle Matrizen	64
5.4	Operationen mit Matrizen	66
5.4.1	Addition (Subtraktion) von Matrizen	66
5.4.2	Multiplikation einer Matrix mit einem skalaren Faktor	66
5.4.3	Multiplikation von Matrizen	67
5.5	Ökonomische Anwendung	67
5.6	Matrizenrechnung mit Scilab	71
5.7	Fazit	72
6	Lineare Gleichungssysteme	73
6.1	Vorbemerkung	74
6.2	Inhomogene lineare Gleichungssysteme	74
6.2.1	Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems	75
6.2.2	Linear abhängige Gleichungen im Gleichungssystem	77

6.2.3	Lösen eines Gleichungssystems mit dem Gauß-Algorithmus	80
6.2.4	Lösen eines Gleichungssystems mit Scilab	86
6.3	Rang einer Matrix	86
6.3.1	Eigenschaft des Rangs	86
6.3.2	Rang und lineares Gleichungssystem	87
6.3.3	Berechnung des Rangs mit Scilab	88
6.4	Inverse einer Matrix	88
6.4.1	Eigenschaft der Inversen	88
6.4.2	Berechnung der Inversen	89
6.4.3	Berechnung von Inversen mit Scilab	90
6.5	Ökonomische Anwendung: Input-Output-Analyse	90
6.5.1	Klassische Analyse	91
6.5.2	Preisanalyse	93
6.5.3	Lösen linearer Gleichungssysteme mit Scilab	98
6.6	Determinante einer Matrix	100
6.6.1	Berechnung von Determinanten	101
6.6.2	Einige Eigenschaften von Determinanten	105
6.6.3	Berechnung von Determinanten in Scilab	105
6.7	Homogene Gleichungssysteme	106
6.7.1	Eigenwerte	106
6.7.2	Eigenvektoren	107
6.7.3	Einige Eigenschaften von Eigenwerten	108
6.7.4	Ähnliche Matrizen	108
6.7.5	Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren mit Scilab	110
6.8	Fazit	110
7	Lineare Optimierung	111
7.1	Vorbemerkung	111
7.2	Formulierung der Grundaufgabe	112
7.3	Grafische Maximierung	115
7.4	Matrix-Formulierung der linearen Optimierung	115
7.5	Simplex-Methode für die Maximierung	117
7.6	Interpretation des Simplex-Endtableaus	121
7.7	Sonderfälle im Simplex-Algorithmus	121
7.7.1	Unbeschränkte Lösung	121
7.7.2	Degeneration	122
7.7.3	Mehrdeutige Lösung	122
7.8	Erweiterungen des Simplex-Algorithmus	123
7.8.1	Berücksichtigung von Größer-gleich-Beschränkungen	123
7.8.2	Berücksichtigung von Gleichungen	126
7.9	Ein Minimierungsproblem	127
7.10	Grafische Minimierung	128
7.11	Simplex-Methode für die Minimierung	129
7.12	Dualitätstheorem der linearen Optimierung	131

7.13	Lineare Optimierung mit Scilab	132
7.14	Fazit	134

Teil III Analysis

8	Funktionen mit einer Variablen	137
8.1	Vorbemerkung	137
8.2	Funktionsbegriff	138
8.3	Rationale Funktionen	141
8.3.1	Partialdivision und Linearfaktorzerlegung	143
8.3.2	Regula falsi	144
8.3.3	Nullstellenberechnung mit Scilab	148
8.4	Gebrochen-rationale Funktionen	149
8.5	Folgen	151
8.5.1	Arithmetische Folge	152
8.5.2	Geometrische Folge	153
8.6	Reihen	153
8.6.1	Arithmetische Reihe	154
8.6.2	Geometrische Reihe	155
8.7	Fazit	156
9	Grundlagen der Finanzmathematik	159
9.1	Vorbemerkung	160
9.2	Tageszählkonventionen	161
9.3	Lineare Zinsrechnung	162
9.4	Exponentielle Zinsrechnung	163
9.4.1	Nachschüssige exponentielle Verzinsung	163
9.4.2	Vorschüssige exponentielle Verzinsung	165
9.4.3	Gemischte Verzinsung	166
9.4.4	Unterjährige periodische Verzinsung	167
9.5	Rentenrechnung	172
9.5.1	Rentenrechnung mit linearer Verzinsung	172
9.5.2	Rentenrechnung mit exponentieller Verzinsung	174
9.6	Besondere Renten	187
9.6.1	Wachsende Rente	187
9.6.2	Ewige Rente	188
9.7	Kurs- und Renditeberechnung eines Wertpapiers	189
9.7.1	Kursberechnung	189
9.7.2	Renditeberechnung für ein Wertpapier	192
9.7.3	Berechnung einer Wertpapierrendite mit Scilab	194
9.7.4	Zinsstruktur	194
9.7.5	Barwertberechnung bei nicht-flacher Zinsstruktur	195
9.7.6	Berechnung von Nullkuponrenditen mit Scilab	199
9.7.7	Duration	200

9.7.8	Berechnung der Duration mit Scilab	203
9.8	Annuitätenrechnung	204
9.8.1	Annuität	205
9.8.2	Restschuld	206
9.8.3	Tilgungsrate	207
9.8.4	Tilgungsplan	208
9.8.5	Berechnung eines Tilgungsplans mit Scilab	209
9.8.6	Anfänglicher Tilgungssatz	210
9.8.7	Effektiver Kreditzinssatz	212
9.8.8	Berechnung des effektiven Kreditzinssatzes mit Scilab	217
9.8.9	Mittlere Kreditlaufzeit	218
9.9	Investitionsrechnung	221
9.9.1	Kapitalwertmethode	221
9.9.2	Methode des internen Zinssatzes	223
9.9.3	Berechnungen mit Scilab	224
9.9.4	Probleme der Investitionsrechnung	225
9.10	Fazit	229
10	Differentialrechnung für Funktionen mit einer Variable	231
10.1	Vorbemerkung	232
10.2	Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion	232
10.3	Differentialquotient	234
10.3.1	Ableitung einer Potenzfunktion	236
10.3.2	Ableitung der Exponentialfunktion	237
10.3.3	Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion	238
10.3.4	Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion	238
10.4	Differentiation von verknüpften Funktionen	238
10.4.1	Konstant-Faktor-Regel	238
10.4.2	Summenregel	239
10.4.3	Produktregel	239
10.4.4	Quotientenregel	240
10.4.5	Kettenregel	241
10.5	Ergänzende Differentiationstechniken	243
10.5.1	Ableitung der Umkehrfunktion	243
10.5.2	Ableitung einer logarithmierten Funktion	244
10.5.3	Ableitung der Exponentialfunktion zur Basis a	245
10.5.4	Ableitung der Logarithmusfunktion zur Basis a	245
10.6	Höhere Ableitungen und Extremwerte	246
10.7	Newton-Verfahren	249
10.8	Ökonomische Anwendung	252
10.8.1	Ertragsfunktion	253
10.8.2	Beziehung zwischen Grenzerlös und Preis	255
10.8.3	Kostenfunktion	257
10.8.4	Individuelle Angebotsplanung unter vollkommener Konkurrenz	260

10.8.5	Angebotsverhalten eines Monopolisten	263
10.8.6	Elastizitäten	267
10.9	Fazit	271
11	Funktionen und Differentialrechnung mit zwei Variablen	273
11.1	Vorbemerkung	273
11.2	Funktionen mit zwei Variablen	274
11.2.1	Isoquanten	275
11.2.2	Nullstellen	275
11.3	Differenzieren von Funktionen mit zwei Variablen	276
11.3.1	Partielles Differential	276
11.3.2	Partielles Differential höherer Ordnung	278
11.3.3	Totales Differential	278
11.3.4	Differentiation impliziter Funktionen	279
11.3.5	Ökonomische Anwendungen	280
11.4	Extremwertbestimmung	283
11.5	Extremwertbestimmung unter Nebenbedingung	286
11.5.1	Interpretation des Lagrange-Multiplikators	290
11.5.2	Hinreichende Bedingung für ein Maximum bzw. Minimum	290
11.5.3	Ökonomische Anwendung: Minimalkostenkombination ..	294
11.5.4	Ökonomische Anwendung: Portfolio-Theorie nach Markowitz	297
11.6	Fazit	316
12	Grundlagen der Integralrechnung	317
12.1	Vorbemerkung	317
12.2	Das unbestimmte Integral	318
12.2.1	Integrale für elementare Funktionen	319
12.2.2	Integrationsregeln	320
12.2.3	Ökonomische Anwendung	327
12.3	Das bestimmte Integral	329
12.3.1	Hauptsatz der Integralrechnung	330
12.3.2	Eigenschaften bestimmter Integrale	331
12.3.3	Beispiele für bestimmte Integrale	333
12.3.4	Ökonomische Anwendung	334
12.3.5	Integralberechnung mit Scilab	335
12.4	Uneigentliche Integrale	336
12.4.1	Ökonomische Anwendung	337
12.4.2	Statistische Anwendung	337
12.5	Fazit	338

Teil IV Anhang

Eine kurze Einführung in Scilab	341
--	------------

Lösungen zu den Übungen 345

Literaturverzeichnis 371

Sachverzeichnis 373