Angewandte Funktionalanalysis

Manfred Dobrowolski

Angewandte Funktionalanalysis

Funktionalanalysis, Sobolev-Räume und elliptische Differentialgleichungen

2., korrigierte und überarbeitete Auflage

Springer

Prof. Dr. Manfred Dobrowolski
Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Am Hubland
97074 Würzburg
Deutschland
dobro@mathematik.uni-wuerzburg.de

ISBN 978-3-642-15268-9 e-ISBN 978-3-642-15269-6
DOI 10.1007/978-3-642-15269-6
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2010): 46-01, 35-01, 65-01

Einbandentwurf: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Für Lisa

Vorwort

Das vorliegende Buch ist aus einem Skriptum zu einer zweisemestrigen Vorlesung mit dem Titel „Höhere Analysis“ entstanden, die ich mehrfach an den Universitäten Erlangen/Nürnberg und Würzburg gehalten habe. Die Idee dieser Vorlesung besteht darin, neben der Funktionalanalysis auch Anwendungen aus der konkreten Analysis darzustellen. Ähnlich wie in einem Grundwortschatz einer Fremdsprache orientiert sich die Auswahl des Stoffs daran, daß der Leser nach der Lektüre dieses Buches möglichst viele Originalarbeiten aus dem Bereich Angewandte Analysis, Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen lesen und verstehen kann. Eine Ausnahme bilden die Sobolev-Räume, die sehr detailliert behandelt werden. Da dieser Stoff trocken und schwierig ist, werden die technischen Sätze in Kapitel 6 zum Nachschlagen zusammengestellt. In meinen Vorlesungen bespreche ich dieses Kapitel nur kursorisch und stelle die konkreten Resultate erst dann vor, wenn sie tatsächlich gebraucht werden. Diese Vorgehensweise empfehle ich auch dem Leser.

Für Verbesserungsvorschläge, auch Hinweise auf Tippfehler, bin ich jedem Leser dankbar (dobro@mathematik.uni.wuerzburg.de). Jegliche Resonanz, auch Fragen zu den Übungsaufgaben sind erwünscht. Für die Leser steht eine Internetseite (http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/˜dobro/af/index.html) mit Ergänzungen zum Buch zur Verfügung.

Mein Dank gilt allen, die beim Zustandekommen dieses Buches mitgewirkt haben: Frau Gertraud Hein für ihre Unterstützung beim Abfassen des Manuskripts, Herrn Dr. David Seider, Herrn Dipl.-Math. Ralf Winkler und meiner Frau Helga Dobrowolski für ihre Anregungen und ihr geduldiges Korrekturlesen, und nicht zuletzt dem Springer-Verlag.

Würzburg, im Juni 2005 *Manfred Dobrowolski*

Vorwort zur zweiten Auflage

Neben einigen Korrekturen habe ich für die zweite Auflage vor allem das 6. Kapitel neu gefaßt und erweitert. Es enthält nun auch die Charakterisierung der Sobolev-Räume gebrochener Ordnung als Spurräume von Funktionen in $H^{1,p}$ sowie eine kurze Darstellung der Interpolation von Banach-Räumen mit Anwendungen auf die Theorie der Sobolev-Räume.

Würzburg, im Juli 2010 *Manfred Dobrowolski*

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische und metrische Räume 1
1.1 Topologische Räume und stetige Abbildungen 1
1.2 Metrische Räume 6
1.3 Der Banachsche Fixpunktsatz 9
1.4 Kompakte Räume 12

2 Banach- und Hilbert-Räume 19
2.1 Banach-Räume 19
2.2 Endlich dimensionale Räume 21
2.3 Stetige lineare Abbildungen und der normierte Dualraum 23
2.4 Hilbert-Räume 28
2.5 Räume stetiger Funktionen und der Satz von Arzela-Ascoli . . . 33
2.6 Die Hölder-Räume $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ 36

3 Die Prinzipien der Funktionalanalysis 43
3.1 Der Satz von Baire und das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit 43
3.2 Das Prinzip der offenen Abbildung 45
3.3 Hahn-Banach-Sätze 47
3.4 Lokalkonvexe topologische Vektorräume 50
3.5 Bidualraum und schwache Topologien 53
3.6 Schwache Folgenkompaktheit und reflexive Räume 57
3.7 Konvexität und schwache Topologie 60

4 Die Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$ 67
4.1 Das Lebesgue-Integral 67
4.2 Definition der Räume $L^p(\Omega)$ 71
4.3 Mollifier und dichte Unterräume 74
4.4 Konvergenzeigenschaften von Folgen meßbarer Funktionen 77
4.5 Der Dualraum von $L^p(\Omega)$ 79

5 Die Sobolev-Räume $H^{m,p}(\Omega)$ ... 87
5.1 Das Fundamentallemma der Variationsrechnung ... 87
5.2 Schwache Ableitungen ... 88
5.3 Definition und grundlegende Eigenschaften der Sobolev-Räume 91
5.4 Produkt- und Kettenregel ... 95
5.5 Differenzenquotienten und schwache Differenzierbarkeit von Lipschitzfunktionen ... 97

6 Fortsetzungs- und Einbettungssätze für Sobolev-Funktionen 101
6.1 Gebiete ... 101
6.2 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $H^{m,p}(\Omega)$ ... 105
6.3 Der Transformationssatz ... 106
6.4 Fortsetzungssätze ... 107
6.5 Einbettungen in $L^q(\Omega)$ ... 109
6.6 Randwerte von Sobolev-Funktionen ... 112
6.7 Kompakte Einbettungen in $L^q(\Omega)$ ... 116
6.8 Einbettungen in Räume stetiger Funktionen ... 120
6.9 Dualräume von $H^{m,p}(\Omega)$ und die Räume $H^{-m,q}(\Omega)$ ... 122
6.10 Die gebrochenen Sobolev-Räume $H^{s,p}(\Omega)$ ... 124
6.11 Ein exakter Spur- und Fortsetzungssatz für $H^{1,p}$-Funktionen ... 130
6.12 Reelle Interpolation von Banach-Räumen ... 135
6.13 Die Räume $H^{s,p}$ und $N^{s,p}$ als Interpolationsräume ... 138

7 Elliptische Differentialgleichungen ... 147
7.1 Starke und schwache Lösungen der Poisson-Gleichung ... 147
7.2 Existenz von Lösungen elliptischer Differentialgleichungen ... 150
7.3 Die Differenzenquotienten-Technik ... 152
7.4 Regularität auf konvexen Gebieten ... 156
7.5 Maximumprinzipien ... 159
7.6 Die Verfahren von Ritz und Galerkin ... 163
7.7 Finite Elemente ... 165

8 Einführung in die Operatorenrechnung und Spektraltheorie 175
8.1 Spektrum und Resolventenmenge ... 175
8.2 Struktur der Resolventenmenge und des Resolventenoperators . 177
8.3 Kompakte Operatoren ... 179
8.4 Adjungierte Operatoren, Annihilatoren und Gelfandscher Dreier ... 180
8.5 Quotientenräume ... 187
8.6 Operatoren mit abgeschlossenem Bild ... 188
8.7 Fredholm-Operatoren und die Spektraltheorie kompakter Operatoren ... 192
8.8 Integralgleichungen ... 195
8.9 Gårdingsche Ungleichung ... 196
8.10 Das abstrakte Eigenwertproblem ... 200

8.11 Das Eigenwertproblem für den Laplace Operator 205
8.12 Zur Klassifikation partieller Differentialgleichungen 210

9 Distributionen und Fourier-Transformation 215
9.1 Distributionen 215
9.2 Die Fourier-Transformation in $\mathcal{S}$ 224
9.3 Die Fourier-Transformation in $\mathcal{S}'$ und in L^2 228
9.4 Sobolev-Räume und Fourier-Transformation, Spurräume 231
9.5 Die Gårdingsche Ungleichung für elliptische Operatoren 239

A Anhang 247
A.1 Konvexität und elementare Ungleichungen 247
A.2 Fortsetzung stetiger Funktionen 249
A.3 Der Weierstraßsche Approximationssatz 251
A.4 Der lokalkonvexe Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ 253
A.5 Harmonische Funktionen und der Satz von Liouville 253
A.6 Polarkoordinaten 255
A.7 Reelle und komplexe Vektorräume 256

Lösungen 257

Literaturverzeichnis 271

Symbolverzeichnis 275

Sachverzeichnis 279