

Elektromagnetische Feldtheorie

Günther Lehner

Elektromagnetische Feldtheorie

für Ingenieure und Physiker

7. bearbeitete Auflage

 Springer

Prof. Dr. rer. nat. Günther Lehner (em.)
Universität Stuttgart
Fak. 05 Informatik, Elektrotechnik
und Informationstechnik
Pfaffenwaldring 47
70569 Stuttgart

ISBN 978-3-642-13041-0

e-ISBN 978-3-642-13042-7

DOI 10.1007/978-3-642-13042-7

Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010, 2008, 2006, 2004, 1996, 1994, 1990

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandgestaltung: eStudioCalamar, Figueres/Berlin

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.de)

*Für Lore († 1984)
und Helma
ohne die dieses Buch
nicht entstanden wäre*

Vorwort zur 7. Auflage

Die Theorie elektromagnetischer Felder ist schon lange nicht mehr ohne die spezielle Relativitätstheorie denkbar. Deshalb habe ich das vorliegende Buch schon vor längerer Zeit durch einen *Anhang über die spezielle Relativitätstheorie* ergänzt. Diese ist, wie Einstein zeigte, bereits in den Maxwell'schen Gleichungen enthalten. Vieles in der Theorie elektromagnetischer Felder kann auch erst mit Hilfe der speziellen Relativitätstheorie wirklich verstanden werden, die scheinbar mißglückter Versuche zur Lichtausbreitung wegen entstanden ist. Die Versuche von Michelson bzw. Michelson und Morley gehören, gerade weil sie ihr ursprüngliches Ziel (die unterschiedlichen Lichtgeschwindigkeiten in verschiedenen Inertialsystemen zu messen) verfehlt haben und verfehlen mußten, zu den folgenreichsten und wichtigsten Versuchen der Wissenschaftsgeschichte. Sie zeigen, daß die Vorstellungen zutreffen, die Einstein zur speziellen Relativitätstheorie geführt haben. Nun besteht das Licht aus Lichtquanten (Photonen). Diese besitzen Energie und, nach der speziellen Relativitätstheorie, auch Masse (allerdings, wie üblicherweise angenommen, keine Ruhmasse – sollten sie dennoch eine Ruhmasse haben, so muß sie sehr klein sein; siehe Anhang A1). Sie unterliegen deshalb wie jede andere Masse der Gravitation. Sie verhalten sich in Gravitationsfeldern allerdings anders als es die klassische Newtonsche Gravitationstheorie erwarten läßt. Fliegen beispielsweise Lichtquanten nah an der Sonne (oder einer anderen Masse) vorbei, so werden sie von dieser angezogen und aus ihrer geradlinigen Bahn um einen bestimmtem Winkel abgelenkt. Diese Ablenkung kann man messen. Sie erweist sich als doppelt so groß wie man es nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz erwarten würde. Die Erklärung ergibt sich aus einer ebenfalls von Einstein stammenden Verallgemeinerung der speziellen Relativitätstheorie, der sogenannten allgemeinen Relativitätstheorie. Die Verallgemeinerung besteht darin, daß zwar die vierdimensionale Raumzeit beibehalten wird jedoch nun unter dem Einfluß der im Raum vorhandenen Massen zu einer vierdimensionalen „gekrümmten“ Raumzeit wird. Wenn Lichtbahnen, die per Definitionem kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten (Geodäten), gekrümmt sind, dann ist der Raum nicht „flach“ (euklidisch) sondern gekrümmt. Die Geometrie ist letzten Endes keine mathematische, sondern eine physikalische Disziplin, die wesentlich durch die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen geprägt wird. So hielt ich es für angemessen, einen *Anhang über die allgemeine Relativitätstheorie* als einer, wie ich meine, nicht unwesentlichen Ergänzung der Theorie elektromagnetischer Felder aufzunehmen. Selbstverständlich kann dieser kurze Anhang nur eine erste Einführung in deren großes Gebäude bieten. Er könnte und sollte den einen oder anderen Leser dazu verführen, die weiterführende Literatur zu studieren. Die allgemeine Relativitätstheorie ist schon heute nicht nur theoretisch, sondern auch technisch bedeutsam und sie wird wohl bald noch bedeutsamer werden (etwa in der Satelliten- und Raumfahrttechnik). Herrn Kollegen Professor Wolfgang Weidlich schulde ich Dank für anregende Gespräche über die allgemeine Relativitätstheorie.

Von diesem neuen Anhang abgesehen, habe ich mich auf die Korrektur einiger erst jetzt entdeckter Druckfehler beschränkt.

Wie bisher immer habe ich dem Springer-Verlag und seinen Mitarbeitern für die stets gute und vorbildlich konstruktive Zusammenarbeit zu danken.

Stuttgart, im Frühjahr 2010

Günther Lehner

Vorwort

*Form nur ist Glaube und Tat,
die erst von Händen berührten,
doch dann den Händen entführten
Statuen bergen die Saat.*

Gottfried Benn

Die elektromagnetische Feldtheorie stellt ein für Naturwissenschaftler und Ingenieure grundlegendes Wissensgebiet dar. Die vorliegende Darstellung ist aus einer Vorlesung hervorgegangen, die der Autor seit dem Jahr 1972 an der Universität Stuttgart für die Studenten der Elektrotechnik – sie ist für diese Pflichtfach – gehalten hat. Dennoch hofft der Autor, daß Stoffauswahl und Art der Behandlung das Interesse nicht nur von Ingenieuren, sondern auch von Naturwissenschaftlern finden.

Durch die Form, die Maxwell ihr gegeben hat, kann die elektromagnetische Feldtheorie geradezu als ein Musterbeispiel einer in sich geschlossenen, großartigen, ja schönen Theorie gelten, die jeden begeistert, der sich ernsthaft damit beschäftigt. Dazu gehört, daß sie sowohl in ihrem durchaus anschaulichen Gehalt wie auch in ihrer formalen Ausgestaltung aufgenommen wird. Deshalb hat der Autor sich gleichzeitig um Anschaulichkeit auf der einen, um begriffliche Klarheit und formale Strenge auf der anderen Seite bemüht. Er ist der Überzeugung, daß Anschaulichkeit und formale Strenge keine Widersprüche sind, sondern zwei verschiedene Seiten jeder brauchbaren und vernünftigen Theorie. Niemand sollte Scheu vor mathematisch formulierten Theorien haben. Es gibt und es kann auch nichts Brauchbareres geben als eine gute und logisch konsequente – d. h. eine strenge – Theorie. Natürlich setzt die Anwendung einer Theorie deren anschauliche, ja phantasievolle Durchdringung voraus. Die konzentrierte mathematisch formulierte Theorie ist ja Zentrum und Durchgangspunkt einer zweifachen Anstrengung des menschlichen Geistes, nämlich einerseits das nur scheinbar Chaotische der uns umgebenden Erscheinungen zu ordnen und den ihnen gemeinsamen Kern zu erkennen und andererseits aus diesem Kern heraus die unglaubliche Vielfalt der Erscheinungen neu zu sehen und zu verstehen. Es ist kein Zufall – und deshalb das oben vorangestellte Motto von Gottfried Benn –, daß man dasselbe von der Kunst sagen kann. Kunst und Wissenschaft gehören eng zusammen, auch wenn das heute oft nicht so aussieht. Sie sind zwei einander ergänzende, nicht einander widersprechende Wege zu einem Ziel. Beide wollen ihren Aussagen die vollkommene Form geben. Gerade dies ist in der elektromagnetischen Feldtheorie gelungen. Wenn man Wert und Schönheit einer wissenschaftlichen Theorie daran mißt, wie sie den erwähnten Anstrengungen dient,

dann wird die elektromagnetische Feldtheorie einen hervorragenden Platz einnehmen, – vier einfache, unglaublich elegante und (wenn man sich die Mühe gemacht hat, sie zu verstehen) auch anschauliche Gleichungen, eben die Maxwellschen Gleichungen und, ihnen gegenüber, die überwältigende und nicht ausschöpfbare Vielfalt der durch sie beschriebenen elektromagnetischen Erscheinungen in Natur und Technik. Dieses Lehrbuch wird sein Ziel erreicht haben, wenn der Leser am Ende seiner Lektüre dem zustimmen kann.

Auch die erforderlichen mathematischen Hilfsmittel sollten nicht in Form auswendig gelernter Rezepte angewandt werden, sondern mit Anschauung und Phantasie erfüllt werden. Nehmen wir z. B. die in der Feldtheorie ständig benutzen Integralsätze von Gauß und Stokes. Sie hängen mit den Begriffen der Divergenz (div) und der Rotation (rot) von Vektorfeldern zusammen. Beide Begriffe sind koordinatenfrei und ganz anschaulich definiert, wobei die Beziehung zu Quellen (oder Senken) und Wirbeln deutlich wird. Die beiden genannten Integralsätze wiederum sind nichts anderes als unmittelbar anschauliche und beinahe selbstverständliche Konsequenzen dieser beiden Definitionen. An dieser Stelle ist auch erwähnenswert, daß die Maxwellschen Gleichungen zwei Vektorfelder mit ihren Wechselwirkungen, das elektrische und das magnetische Feld, auf die eleganteste und einfachste denkbare Art und Weise beschreiben. Man kann nämlich beweisen und sich auch anschaulich klar machen, daß ein Vektorfeld durch Angabe aller Quellen und Wirbel vollständig und eindeutig beschrieben ist (das ist der Inhalt des in einem Anhang behandelten Helmholtzschen Theorems). Genau diesem Zweck dienen die Maxwellschen Gleichungen in bewundernswerter Weise. Zwei von ihnen beschreiben die Quellen und Wirbel des elektrischen, zwei die des magnetischen Feldes. Die Zusammenhänge sind allerdings materialabhängig, weshalb noch drei weitere Gleichungen erforderlich sind, die Aussagen über Leitfähigkeit, Polarisierbarkeit und Magnetisierbarkeit der beteiligten Medien zum Inhalt haben.

Die erwähnte Geschlossenheit der elektromagnetischen Feldtheorie ist eine formale. Inhaltlich steht sie keineswegs für sich allein und isoliert da. Sie hängt im Gegenteil eng mit der ganzen Physik zusammen, besonders mit der Relativitäts- und der Quantentheorie. Darüber hinaus ist keineswegs klar, ob sie nicht eines Tages im Lichte neuer Erkenntnisse modifiziert werden muß. Wie jede Theorie, kann sie Geltung nur im Rahmen aller bisher gemachten Erfahrungen und Experimente und der dabei erzielten Meßgenauigkeit beanspruchen. Wer sich mit elektromagnetischer Feldtheorie beschäftigt, wird bald erkennen, daß es viele und zum Teil sehr wesentliche noch offene Fragen gibt. Es war dem Autor wichtig, dies deutlich werden zu lassen. Im Text wird mehrfach auf solche Fragen hingewiesen, von denen einige in Anhängen etwas vertieft werden (wobei dann dort, allerdings auch nur dort, einiges aus der Quantenmechanik vorausgesetzt wird, da diese Fragen anders nicht vertieft werden können). So steht, um ein Beispiel zu nennen, das Coulombsche Gesetz schon in der Schule fast am Anfang aller Beschäftigung mit Feldtheorie und Physik überhaupt. Man könnte deshalb geneigt sein, es für endgültig und selbstverständlich zu halten. In Wirklichkeit ist das keineswegs der Fall, wenn auch bis heute Abweichungen davon nicht nachgewiesen werden konnten. Andererseits hätte es sehr merkwürdige Konsequenzen, sollte das Coulombsche Gesetz doch nicht

exakt gelten. So wäre dann z. B. die Ruhmasse von Photonen nicht exakt Null, und es gäbe auch keine elektromagnetische Strahlung beliebig kleiner Frequenz. Und ist es nicht auch merkwürdig, daß die bisher genaueste Überprüfung des Coulombschen Gesetzes auf Satellitenmessungen am magnetischen Dipolfeld des Planeten Jupiter beruht? Diese grundsätzliche Offenheit der elektromagnetischen Feldtheorie (wie jeder Theorie) bedeutet jedoch nicht, daß die bisherigen Erkenntnisse fraglich seien. Sie sind so oft überprüft und bestätigt worden, daß sie (im Rahmen der bisher erreichten Meßgenauigkeit) keinen Zweifel unterliegen. Der denkbare Fortschritt zu neuen Erkenntnissen führt nicht dazu, daß die bisherigen Theorien ungültig werden, sondern dazu, daß sie in neuen, umfassenderen Theorien aufgehen, wobei dann unter Umständen alte Begriffe eine Revision erfahren und in einem neuen, manchmal sehr unerwarteten Licht erscheinen (wie z. B. der Begriff des Vektorpotentials durch den Bohm-Aharonov-Effekt). So ist die elektromagnetische Feldtheorie trotz dieser Offenheit eine sehr solide Grundlage der Naturwissenschaft und der Technik, der sich der konstruierende Ingenieur in allen gegenwärtigen und zukünftig absehbaren Bereichen der Technik in vollem Umfang anvertrauen kann.

Letzten Endes kann der Autor nur hoffen, daß das vorliegende Lehrbuch seinen Lesern die Schönheit und die Nützlichkeit der elektromagnetischen Feldtheorie – beides hängt eng zusammen – näherbringen kann.

Es ist dem Autor ein Bedürfnis, allen zu danken, die zur Realisierung dieses Lehrbuches beigetragen haben, sowohl im Springer-Verlag als auch im Institut für Theorie der Elektrotechnik der Universität Stuttgart. Mein Dank gilt insbesondere auch Herrn Dipl.-Ing. H. Maisch für die Durchsicht des Manuskripts und die Unterstützung bei der Herstellung vieler Figuren sowie Frau K. Schmidt und Frau H. Stängle für ihre Arbeit am Manuskript.

Stuttgart, im Sommer 1990

Günther Lehner

Inhaltsverzeichnis

1 Die Maxwell'schen Gleichungen	1
1.1 Einleitung	1
1.2 Der Begriff der Ladung und das Coulombsche Gesetz	2
1.3 Die elektrische Feldstärke \mathbf{E} und die dielektrische Verschiebung \mathbf{D}	4
1.4 Der elektrische Fluß	5
1.5 Die Divergenz eines Vektorfeldes und der Gaußsche Integralsatz	9
1.6 Arbeit im elektrischen Feld	12
1.7 Die Rotation eines Vektorfeldes und der Stokessche Integralsatz	15
1.8 Potential und Spannung	20
1.9 Elektrischer Strom und Magnetfeld: Das Durchflutungsgesetz	24
1.10 Das Prinzip der Ladungserhaltung und die 1. Maxwell'sche Gleichung	28
1.11 Das Induktionsgesetz	32
1.12 Die Maxwell'schen Gleichungen	33
1.13 Das Maßsystem	37
2 Die Grundlagen der Elektrostatik	43
2.1 Grundlegende Beziehungen	43
2.2 Feldstärke und Potential für gegebene Ladungsverteilungen	44
2.3 Spezielle Ladungsverteilungen	47
2.3.1 Eindimensionale, ebene Ladungsverteilungen	47
2.3.2 Kugelsymmetrische Verteilungen	48
2.3.3 Zylindersymmetrische Verteilungen	51
2.4 Das Feld von zwei Punktladungen	54
2.5 Ideale Dipole	60
2.5.1 Der ideale Dipol und sein Potential	60
2.5.2 Volumenverteilungen von Dipolen	62
2.5.3 Flächenverteilungen von Dipolen (Doppelschichten)	65
2.5.4 Liniendipole	71
2.6 Das Verhalten eines Leiters im elektrischen Feld	73
2.6.1 Metallkugel im Feld einer Punktladung	75
2.6.2 Metallkugel im homogenen elektrischen Feld	78
2.6.3 Metallzylinder im Feld einer Linienladung	81
2.7 Der Kondensator	82
2.8 \mathbf{E} und \mathbf{D} im Dielektrikum	85
2.9 Der Kondensator mit Dielektrikum	89
2.10 Randbedingungen für \mathbf{E} und \mathbf{D} und die Brechung von Kraftlinien	91

2.11	Die Punktladung in einem Dielektrikum	95
2.11.1	Homogenes Dielektrikum	95
2.11.2	Ebene Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika	96
2.12	Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld	98
2.12.1	Das Feld einer homogen polarisierten Kugel	98
2.12.2	Äußeres homogenes Feld als Ursache der Polarisation	101
2.12.3	Dielektrische Kugel (ϵ_j) und dielektrischer Außenraum (ϵ_a)	102
2.12.4	Verallgemeinerung: Ellipsoide	105
2.13	Der Polarisationsstrom	107
2.14	Der Energiesatz	109
2.14.1	Der Energiesatz in allgemeiner Formulierung	109
2.14.2	Die elektrostatische Energie	112
2.15	Kräfte im elektrischen Feld	115
2.15.1	Kräfte auf die Platten eines Kondensators	115
2.15.2	Kondensator mit zwei Dielektrika	116
3	Die formalen Methoden der Elektrostatik	118
3.1	Koordinatentransformation	118
3.2	Vektoranalysis für krummlinige, orthogonale Koordinaten	122
3.2.1	Der Gradient	122
3.2.2	Die Divergenz	122
3.2.3	Der Laplace-Operator	123
3.2.4	Die Rotation	124
3.3	Einige wichtige Koordinatensysteme	126
3.3.1	Kartesische Koordinaten	126
3.3.2	Zylinderkoordinaten	126
3.3.3	Kugelkoordinaten	128
3.4	Einige Eigenschaften der Poissonschen und der Laplaceschen Gleichung (Potentialtheorie)	129
3.4.1	Die Problemstellung	129
3.4.2	Die Greenschen Sätze	129
3.4.3	Der Eindeutigkeitsbeweis	131
3.4.4	Modelle	133
3.4.5	Die Diracsche δ -Funktion	133
3.4.6	Punktladung und δ -Funktion	136
3.4.7	Das Potential in einem begrenzten Gebiet	137
3.5	Separation der Laplaceschen Gleichung in kartesischen Koordinaten	140
3.5.1	Die Separation	140
3.5.2	Beispiele	143
3.5.2.1	Ein Dirichletsches Randwertproblem ohne Ladungen im Gebiet	143
3.5.2.2	Dirichletsches Randwertproblem mit Ladungen im Gebiet	148
3.5.2.3	Punktladung im unendlich ausgedehnten Raum	154
3.5.2.4	Anhang zum Abschnitt 3.5: Fourier-Reihen und Fourier-Integrale	156
3.6	Vollständige orthogonale Systeme von Funktionen	161
3.7	Separation der Laplaceschen Gleichung in Zylinderkoordinaten	167
3.7.1	Die Separation	167
3.7.2	Einige Eigenschaften von Zylinderfunktionen	169

3.7.3	Beispiele	173
3.7.3.1	Zylinder mit Flächenladungen	173
3.7.3.2	Punktladung auf der Achse eines dielektrischen Zylinders	177
3.7.3.3	Ein Dirichletsches Randwertproblem und die Fourier-Bessel-Reihen	179
3.7.3.4	Rotationssymmetrische Flächenladungen in der Ebene $z = 0$ und die Hankel-Transformation	183
3.7.3.5	Nichtrotationssymmetrische Ladungsverteilungen	186
3.8	Separation der Laplaceschen Gleichung in Kugelkoordinaten	191
3.8.1	Die Separation	191
3.8.2	Beispiele	195
3.8.2.1	Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld	195
3.8.2.2	Kugel mit beliebiger Oberflächenladung	197
3.8.2.3	Das Dirichletsche Randwertproblem der Kugel	201
3.9	Vielleitersysteme	203
3.10	Ebene elektrostatische Probleme und die Stromfunktion	208
3.11	Analytische Funktionen und konforme Abbildungen	212
3.12	Das komplexe Potential	219
4	Das stationäre Strömungsfeld	235
4.1	Die grundlegenden Gleichungen	235
4.2	Die Relaxationszeit	239
4.3	Die Randbedingungen	240
4.4	Die formale Analogie zwischen D und g	245
4.5	Einige Strömungsfelder	246
4.5.1	Die punktförmige Quelle im Raum	246
4.5.2	Linienquellen	249
4.5.3	Ein gemischtes Randwertproblem	251
5	Die Grundlagen der Magnetostatik	259
5.1	Grundgleichungen	259
5.2	Einige Magnetfelder	269
5.2.1	Das Feld eines geradlinigen, konzentrierten Stromes	269
5.2.2	Das Feld rotationssymmetrischer Stromverteilungen in zylindrischen Leitern	276
5.2.3	Das Feld einfacher Spulen	277
5.2.4	Das Feld eines Kreisstromes und der magnetische Dipol	279
5.2.5	Das Feld einer beliebigen Stromschleife	286
5.2.6	Das Feld ebener Leiterschleifen in der Schleifenebene	289
5.3	Der Begriff der Magnetisierung	291
5.4	Kraftwirkungen auf Dipole in Magnetfeldern	297
5.5	B und H in magnetisierbaren Medien	298
5.6	Der Ferromagnetismus	304
5.7	Randbedingungen für B und H und die Brechung magnetischer Kraftlinien	310
5.8	Platte, Kugel und Hohlkugel im homogenen Magnetfeld	313
5.8.1	Die ebene Platte	313
5.8.2	Die Kugel	314
5.8.3	Die Hohlkugel	317
5.9	Spiegelung an der Ebene	319

5.10	Ebene Probleme	327
5.11	Zylindrische Randwertprobleme	328
5.11.1	Separation	328
5.11.2	Die Struktur rotationssymmetrischer Magnetfelder	330
5.11.3	Beispiele	332
5.11.3.1	Zylinder mit azimutalen Flächenströmen	332
5.11.3.2	Azimutale Flächenströme in der x-y-Ebene	335
5.11.3.3	Ringstrom und magnetisierbarer Zylinder	337
5.12	Magnetische Energie, magnetischer Fluß und Induktivitätskoeffizienten	341
5.12.1	Die magnetische Energie	341
5.12.2	Der magnetische Fluß	345
6	Zeitabhängige Probleme I (Quasistationäre Näherung)	349
6.1	Das Induktionsgesetz	349
6.1.1	Induktion durch zeitliche Veränderung von B	349
6.1.2	Induktion durch Bewegung des Leiters	350
6.1.3	Induktion durch gleichzeitige Änderung von B und Bewegung des Leiters	353
6.1.4	Die Unipolarmaschine	355
6.1.5	Der Versuch von Hering	357
6.2	Die Diffusion von elektromagnetischen Feldern	359
6.2.1	Die Gleichungen für E , g , B und A	359
6.2.2	Der physikalische Inhalt der Gleichungen	360
6.2.3	Abschätzungen und Ähnlichkeitsgesetze	364
6.3	Die Laplace-Transformation	367
6.4	Felddiffusion im beiderseits unendlichen Raum	371
6.5	Felddiffusion im Halbraum	376
6.5.1	Allgemeine Lösung	376
6.5.2	Die Diffusion des Feldes von der Oberfläche ins Innere des Halbraumes (Einfluß der Randbedingung)	378
6.5.3	Die Diffusion des Anfangsfeldes im Halbraum (Einfluß der Anfangsbedingung)	382
6.5.4	Periodisches Feld und Skineffekt	384
6.6	Felddiffusion in der ebenen Platte	389
6.6.1	Allgemeine Lösung	389
6.6.2	Die Diffusion des Anfangsfeldes (Einfluß der Anfangsbedingung)	390
6.6.3	Der Einfluß der Randbedingungen	393
6.7	Das zylindrische Diffusionsproblem	398
6.7.1	Die Grundgleichungen	398
6.7.2	Das longitudinale Feld B_z	399
6.7.3	Das azimutale Feld B_φ	404
6.7.4	Der Skineffekt im zylindrischen Draht	407
6.8	Grenzen der quasistationären Theorie	411
7	Zeitabhängige Probleme II (Elektromagnetische Wellen)	413
7.1	Die Wellengleichungen und ihre einfachsten Lösungen	413
7.1.1	Die Wellengleichungen	413
7.1.2	Der einfachste Fall: Ebene Wellen im Isolator	414

7.1.3	Harmonische ebene Wellen	419
7.1.4	Elliptische Polarisierung	423
7.1.5	Stehende Wellen	425
7.1.6	TE- und TM-Wellen	426
7.1.7	Energiedichte in und Energietransport durch Wellen	430
7.2	Ebene Wellen in einem leitfähigen Medium	431
7.2.1	Wellengleichungen und Dispersionsbeziehung	431
7.2.2	Der Vorgang ist harmonisch im Raum	433
7.2.3	Der Vorgang ist harmonisch in der Zeit	435
7.3	Reflexion und Brechung von Wellen	439
7.3.1	Reflexion und Brechung bei Isolatoren	439
7.3.2	Die Fresnelschen Beziehungen für Isolatoren	441
7.3.3	Nichtmagnetische Medien	444
7.3.4	Totalreflexion	447
7.3.5	Reflexion an einem leitfähigen Medium	449
7.4	Die Potentiale und ihre Wellengleichungen	450
7.4.1	Die inhomogenen Wellengleichungen für \mathbf{A} und ϕ	450
7.4.2	Die Lösung der inhomogenen Wellengleichungen (Retardierung)	454
7.4.3	Der elektrische Hertzsche Vektor	456
7.4.4	Vektorpotential für \mathbf{D} und magnetischer Hertzscher Vektor	457
7.4.5	Hertzsche Vektoren und Dipolmomente	459
7.4.6	Hertzsche Vektoren für homogene leitfähige Medien ohne Raumladungen	462
7.5	Der Hertzsche Dipol	464
7.5.1	Die Felder des schwingenden Dipols	464
7.5.2	Das Fernfeld und die Strahlungsleistung	470
7.6	Die Rahmenantenne	473
7.7	Wellen in zylindrischen Hohlleitern	476
7.7.1	Grundgleichungen	476
7.7.2	TM-Wellen	479
7.7.3	TE-Wellen	480
7.7.4	TEM-Wellen	481
7.8	Der Rechteckhohlleiter	486
7.8.1	Die Separation	486
7.8.2	TM-Wellen im Rechteckhohlleiter	487
7.8.3	TE-Wellen im Rechteckhohlleiter	489
7.8.4	TEM-Wellen	491
7.9	Rechteckige Hohlraumresonatoren	492
7.10	Der kreiszylindrische Hohlleiter	496
7.10.1	Die Separation	496
7.10.2	TM-Wellen im kreiszylindrischen Hohlleiter	498
7.10.3	TE-Wellen im kreiszylindrischen Hohlleiter	500
7.10.4	Das Koaxialkabel	502
7.10.5	Die Telegraphengleichung	504
7.11	Das Problem des Hohlleiters als Variationsproblem	506
7.12	Rand- und Anfangswertprobleme	509
7.12.1	Das Anfangswertproblem des unendlichen, homogenen Raumes	510
7.12.2	Das Randwertproblem des Halbraumes	514

8 Numerische Methoden	517
8.1 Einleitung	517
8.2 Potentialtheoretische Grundlagen	518
8.2.1 Randwertprobleme und Integralgleichungen	518
8.2.2 Beispiele	521
8.2.2.1 Das eindimensionale Problem	521
8.2.2.2 Das Dirichletsche Randwertproblem der Kugel	524
8.2.3 Die Mittelwertsätze der Potentialtheorie	527
8.3 Randwertprobleme als Variationsprobleme	528
8.3.1 Variationsintegrale und Eulersche Gleichungen	528
8.3.2 Beispiele	532
8.3.2.1 Poisson-Gleichung	532
8.3.2.2 Helmholtz-Gleichung	536
8.4 Die Methode der gewichteten Residuen	540
8.4.1 Die Kollokationsmethode	541
8.4.2 Die Methode der Teilgebiete	543
8.4.3 Die Momentenmethode	544
8.4.4 Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate	544
8.4.5 Die Galerkin-Methode	545
8.5 Random-Walk-Prozesse	548
8.6 Die Methode der finiten Differenzen	552
8.6.1 Die grundlegenden Beziehungen	552
8.6.2 Ein Beispiel	557
8.7 Die Methode der finiten Elemente	561
8.8 Die Methode der Randelemente	568
8.9 Ersatzladungsmethoden	573
8.10 Die Monte-Carlo-Methode	575
Anhänge	581
A.1 Elektromagnetische Feldtheorie und Photonenruhmasse	581
A.1.1 Einleitung	581
A.1.2 Beispiele	586
A.1.2.1 Gleichmäßig geladene Kugeloberfläche	586
A.1.2.2 Der ebene Kondensator und seine Kapazität	587
A.1.2.3 Der ideale elektrische Dipol	589
A.1.2.4 Der ideale magnetische Dipol	590
A.1.2.5 Ebene Wellen	591
A.1.3 Messungen und Schlußfolgerungen	594
A.1.3.1 Magnetfelder der Erde und des Jupiter	594
A.1.3.2 Schumann-Resonanzen	595
A.1.3.3 Grundsätzliche Grenzen - die Unschärferelation	596
A.2 Magnetische Monopole und Maxwellsche Gleichungen	597
A.2.1 Einleitung	597
A.2.2 Duale Transformationen	599
A.2.3 Eigenschaften von magnetischen Monopolen	603
A.2.4 Die Suche nach magnetischen Monopolen	604
A.3 Über die Bedeutung der elektromagnetischen Felder und Potentiale (Bohm-Aharonov-Effekte)	605

A.3.1	Einleitung	605
A.3.2	Die Rolle der Felder und Potentiale	608
A.3.3	Die Ehrenfestschen Theoreme	610
A.3.4	Magnetfeld und Vektorpotential einer unendlich langen idealen Spule	611
A.3.5	Elektronenstrahlinterferenzen am Doppelspalt	612
A.3.6	Schlußfolgerungen	616
A.4	Die Lienard-Wiechertschen Potentiale	616
A.5	Das Helmholtzsche Theorem	620
A.5.1	Ableitung und Interpretation	620
A.5.2	Beispiele	624
A.5.2.1	Homogenes Feld im Inneren einer Kugel	624
A.5.2.2	Punktladung im Inneren einer leitfähigen Hohlkugel	628
A.6	Maxwellsche Gleichungen und Relativitätstheorie	629
A.6.1	Galilei- und Lorentz-Transformation	629
A.6.2	Die Lorentz-Transformation als orthogonale Transformation	631
A.6.3	Einige Konsequenzen der Lorentz-Transformation	636
A.6.3.1	Die Lorentz-Kontraktion	636
A.6.3.2	Die Zeitdilatation	637
A.6.3.3	Die relativistische Addition der Geschwindigkeiten	637
A.6.3.4	Aberration und Dopplereffekt	639
A.6.4	Die Lorentz-Transformation der Maxwell'schen Gleichungen	640
A.6.5	Vierervektoren und Vierertensoren	642
A.6.5.1	Definitionen	642
A.6.5.2	Einige wichtige Vierervektoren	643
A.6.5.3	Der Feldtensor F	651
A.6.6	Einige Beispiele	654
A.6.6.1	Flächenladungen und ihre Felder	654
A.6.6.2	Ströme und Raumladungen	656
A.6.6.3	Kraft eines Stromes auf eine bewegte Ladung	658
A.6.6.4	Das Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung	659
A.6.7	Schlußbemerkung	660
A.7	Relativitätstheorie und Gravitation, die Allgemeine Relativitätstheorie	660
A.7.1	Träge und schwere Masse	660
A.7.2	Riemannsche Geometrie	664
A.7.3	Kräfte in einem rotierenden Bezugssystem	669
A.7.4	Die Einsteinsche Feldgleichung	670
A.7.5	Die äußere Schwarzschildmetrik	673
A.7.6	Photonen in Gravitationsfeldern	686
A.7.7	Planetenbewegung und Periheldrehung	691
A.7.8	Gravitomagnetismus	692
A.7.9	Weitere Problemkreise der allgemeinen Relativitätstheorie	693
	Literatur	696
	Sachverzeichnis	699

Symbol-Liste

Allgemeines

\sim	(z. B. \tilde{f}) bezeichnet eine aus f durch eine Integraltransformation entstehende Funktion (Fourier-, Hankel- oder Laplace-Transformation).
$*$	(z. B. z^* , w^*) bezeichnet die jeweils konjugiert komplexe Größe (z. B. zu z , w) oder eine dual zugeordnete Größe (z. B. \mathbf{A}^* zu \mathbf{A} , $(\varphi^*$ zu φ).
n, \perp	als Index bezeichnet senkrechte Komponenten.
t, \parallel	als Index bezeichnet tangentielle Komponenten.
\oint	ein Kreis im Integralzeichen kennzeichnet die Integration über einen geschlossenen Weg (bei einem Linienintegral) oder die Integration über eine geschlossene Oberfläche (bei einem Flächenintegral).
∇	bezeichnet den Nabla-Operator $[\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})]$
$\hat{}$	(z. B. \hat{H}) kennzeichnet quantenmechanische Operatoren.

Lateinische Buchstaben

$\mathbf{a}, a_x, a_y, a_z$	Vektor und seine kartesischen Komponenten
A	Fläche
A	Arbeit
\mathbf{A}	magnetisches Vektorpotential
\mathbf{A}^*	elektrisches (zum magnetischen duales) Vektorpotential
$\arg(z)$	Argument (Phasenwinkel) einer komplexen Zahl.
$\text{ber}(), \text{bei}()$	Kelvinsche Funktionen
\mathbf{B}	magnetische Induktion
\mathbf{B}_0	Amplitude der magnetischen Induktion einer elektromagnetischen Welle
B_n	senkrechte (normale) Komponente von \mathbf{B}
B_t	tangentiale Komponente von \mathbf{B}

c	Lichtgeschwindigkeit, auch Vakuumlichtgeschwindigkeit
c_G	Gruppengeschwindigkeit des Lichts
c_{Ph}	Phasengeschwindigkeit des Lichts
c_{ik}	Influenzkoeffizienten
C_{ik}	Kapazitätskoeffizienten
C	Kapazität
C'	Kapazität pro Längeneinheit
$\cos()$, $\cosh()$	Cosinus, Hyperbelcosinus
D	dielektrische Verschiebung
D_n	senkrechte (normale) Komponente von D
D_t	tangentiale Komponente von D
$d\mathbf{A}$, da	Vektor des Flächenelements
dA , da	Betrag des Flächenelements
$\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, \dots	partielle Ableitungen nach t , x , \dots
$\frac{\partial \phi}{\partial n}$	senkrechte Komponente des Gradienten der Funktion ϕ
dt	Differential der Zeit t
$d\mathbf{s}$	vektorielles Linienelement
ds	Betrag des Linienelementes
$d\tau$	Volumenelement
$d\Omega$	Raumwinkelelement
$d\alpha$	Winkelelement
d	Abstand, Schichtdicke, Skintiefe
$\operatorname{div} \mathbf{a}$	Divergenz des Vektors \mathbf{a}
E	elektrische Feldstärke
E	Betrag der Feldstärke oder komplexe Feldstärke, $E = E_x + iE_y$
E_n	senkrechte (normale) Komponente von E
E_t	tangentiale Komponente von E
E_0	Amplitude der elektrischen Feldstärke einer elektromagnetischen Welle
\overline{E}_{e0} , \overline{E}_{r0} , \overline{E}_{g0}	Amplituden der einfallenden, reflektierten, gebrochenen Welle
E_e	eingepölte Feldstärke oder Feldstärke der einfallenden elektromagnetischen Welle
$E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$	vollständiges elliptisches Integral 2. Art
\mathbf{e}_u	Einheitsvektor in Richtung der Koordinate u
e	elektrische Elementarladung
e	die Zahl e (Basis der natürlichen Logarithmen)
$\exp(x) = e^x$	Exponentialfunktion
$\operatorname{erf}()$	Fehlerfunktion
$\operatorname{erfc}()$	komplementäre Fehlerfunktion $[1 - \operatorname{erf}()]$
$f()$	Funktion
F	Kraft
F	Betrag der Kraft
F	Potential (neben φ und ϕ)

$F = (F_{ik})$	Feldtensor
\mathbf{f}, \mathbf{f}'	Dreierkraft im Bezugssystem Σ bzw. Σ'
G	Newtonsche Gravitationskonstante
$g_{\mu\nu}$	metrischer Tensor
G	Leitwert
G'	Leitwert pro Längeneinheit
$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$	Greensche Funktion
$G_D(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$	Greensche Funktion des Dirichletschen Randwertproblems
$G_N(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$	Greensche Funktion des Neumannschen Randwertproblems
\mathbf{g}, \mathbf{g}_e	elektrische Stromdichte
\mathbf{g}_m	zu \mathbf{g}_e duale magnetische Stromdichte
\mathbf{g}_{magn}	Magnetisierungsstromdichte
$\text{grad } f$	Gradient der Funktion f
h	Plancksche Konstante
\hbar	Plancksche Konstante dividiert durch $2\pi(h/2\pi)$
\mathbf{H}	magnetische Feldstärke
\mathbf{H}_0	Amplitude der magnetischen Feldstärke einer elektromagnetischen Welle
H_n	senkrechte (normale) Komponente von \mathbf{H}
H_t	tangentiale Komponente von \mathbf{H}
$H(x - x_0)$	Heavisidesche Sprungfunktion
H	Hamilton-Funktion
\hat{H}	Hamilton-Operator
I	Stromstärke
$I_m()$	modifizierte Bessel-Funktion 1. Art zum Index m
i	imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$
$J_m()$	Bessel-Funktion zum Index m
$K_m()$	Modifizierte Bessel-Funktion 2. Art zum Index m
$K\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$	vollständiges elliptisches Integral 1. Art
\mathbf{k}	Flächenstromdichte
\mathbf{k}_{magn}	Magnetisierungsflächenstromdichte
\mathbf{k}	Wellenvektor = Wellenzahlvektor
k	Wellenzahl, Betrag des Wellenvektors
$k = 8\pi G/c^4$	Proportionalitätskonstante in der Einsteinschen Feldgleichung
L, l	Länge
l	Wellenzahl
L_{ik}	Induktionskoeffizient
L, L_{il}	Selbstinduktivität
L'	Selbstinduktivität pro Längeneinheit
$\ln()$	natürlicher Logarithmus
$L = (L_{ik})$	Lorentz-Transformation
L^{-1}	inverse Lorentz-Transformation

L^T	transponierte Lorentz-Transformation
$\mathcal{L}(f)$	Laplace-Transformierte der Funktion f
$\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f})$	inverse Laplace-Transformation
m	ganze Zahl
m	Masse
m_0	Ruhmasse
m_s, m_t	schwere Masse, träge Masse
\mathbf{m}	magnetisches Dipolmoment
m	Betrag des magnetischen Dipolmoments
\mathbf{M}	Magnetisierung (räumliche Dichte von \mathbf{m})
n	Brechungsindex
n	ganze Zahl
n	Zahl der Windungen pro Längeneinheit
N	Gesamtwindungszahl
N	Abkürzung für die häufig vorkommende Größe $N = \varepsilon\mu\omega^2 - \mu\kappa i\omega - k_z^2$
$N_m()$	Neumannsche Funktion zum Index m
P	Punkt im Raum
P	Leistung
\mathbf{P}	Polarisation (räumliche Dichte von \mathbf{p})
\mathbf{p}	elektrisches Dipolmoment
p	Betrag des elektrischen Dipolmoments
\mathbf{p}	Impulsvektor
p	Betrag des Impulses
$\hat{\mathbf{p}}$	Operator des Impulsvektors
p_k	kanonische Impulskomponente
p	komplexe Zahl (besonders bei Laplace-Transformationen)
$P_n^m()$	zugeordnete Kugelfunktionen
$P_n() = p_n^0()$	Kugelfunktionen
p_{ik}	Potentialkoeffizienten
Q, Q_e	elektrische Ladung
Q_m	magnetische Ladung
q	elektrische Linienladungsdichte
Q_{magn}	fiktive magnetische Ladung
q_k	kanonische Ortskoordinate
R	Widerstand
R'	Widerstand pro Längeneinheit
R_{magn}	magnetischer Widerstand
R	Reflexionskoeffizient
R_s	Strahlungswiderstand
R_{ars}^k	Riemann-Christoffel-Krümmungstensor
R_{ij}	Ricci-Tensor
R	skalare Krümmung

$r_s = 2GM/c^2$	Schwarzschildradius
\mathbf{r}	Ortsvektor
$\dot{\mathbf{r}}$	Geschwindigkeit (Zeitableitung von \mathbf{r})
$\ddot{\mathbf{r}}$	Beschleunigung (2. Zeitableitung von \mathbf{r})
\mathbf{r}, \mathbf{r}'	Ortsvektor im Bezugssystem Σ bzw. Σ'
r, R	Radius in Kugelkoordinaten (zusammen mit θ, φ)
r	Radius in Zylinderkoordinaten (zusammen mit φ, z)
$\text{rot } \mathbf{a}$	Rotation des Vektors \mathbf{a}
\mathbf{S}	Poynting-Vektor
$\sin(), \sinh()$	Sinus, Hyperbelsinus
$\tan()$	Tangens
t	Zeit
t_0	Diffusionszeit
t_r	Relaxationszeit
$T_{\mu\nu}$	Energie-Impuls-Tensor
U	potentielle Energie
U	Spannung
U_{21}	Spannung zwischen zwei Punkten 1 und 2
u_i	induzierte Spannung
\mathbf{u}, \mathbf{u}'	Geschwindigkeit im Bezugssystem Σ bzw. Σ'
u	Leistungsdichte
u	Realteil einer komplexen Funktion $u + iv$
u_1, u_2, u_3	allgemeine Koordinaten
V	Volumen
V_{eff}	effektives Potential im Schwarzschild-Gravitationsfeld
\mathbf{v}	Geschwindigkeit
v	Betrag der Geschwindigkeit
v_{Ph}	Phasengeschwindigkeit
v_G	Gruppengeschwindigkeit
W	Energie
w	Energiedichte
w	komplexe Funktion, komplexes Potential
x	kartesische Koordinate
x_μ	kovariante Vektorkomponente
x^μ	kontravariante Vektorkomponente
y	kartesische Koordinate
Y_n^m	Kugelflächenfunktion
z	kartesische Koordinate
z	komplexe Zahl $x + iy$
z^*	konjugiert komplexe Zahl $x - iy$
Z	Wellenwiderstand

Z_0	Wellenwiderstand des Vakuums
Z_m	Zylinderfunktion zum Index m

Griechische Buchstaben

α	Winkel
α	Dämpfungskonstante (negativer Imaginärteil der komplexen Wellenzahl $k = \beta - i\alpha$)
α	Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante ($\alpha = \frac{e^2}{2\hbar} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx \frac{1}{137}$)
β	Winkel
β	Phasenkonstante, Realteil der komplexen Wellenzahl $k = \beta - i\alpha$
β	in der Relativitätstheorie übliche Abkürzung für v/c
Γ^k_{ij}	Christoffelsymbol 2. Art
δ_{ik}	Kroneckersymbol
$\delta(x - x_0)$	eindimensionale δ -Funktion
$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$	dreidimensionale δ -Funktion
Δ	Differenz
Δ	Laplace-Operator (z. B. $\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} = \nabla^2$)
Δ_2	Laplace-Operator in der Ebene (z. B. $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$)
ϵ	Dielektrizitätskonstante
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante des Vakuums
ϵ_r	relative Dielektrizitätskonstante
$\boldsymbol{\epsilon}$	tensorielle Dielektrizitätskonstante
$\epsilon_{ik}, \epsilon_{xy}$	Komponenten von ϵ
ξ	dimensionslose kartesische Koordinate $\frac{z}{l}$
η	dimensionslose kartesische Koordinate $\frac{y}{l}$
η	Realteil der Kreisfrequenz $\omega = \eta + i\sigma$
ϑ	Winkel
θ	Winkel der Poldistanz (Kugelkoordinaten)
κ	spezifische elektrische Leitfähigkeit
κ	Compton-Wellenzahl, $\kappa = \frac{m_0 c}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda_c}$
λ	Wellenlänge
λ_g	Grenzwellenlänge
λ_c	Compton-Wellenlänge
λ_{mn}	n . Nullstelle von $J_m(x)$
Λ	kosmologische Konstante
μ	Permeabilität
μ_0	Permeabilität des Vakuums
μ_r	relative Permeabilität
$\boldsymbol{\mu}$	tensorielle Permeabilität

μ_{ik}, μ_{xy}	Komponenten von $\boldsymbol{\mu}$
μ_{mn}	n . Nullstelle der Ableitung $J'_m(x)$
ν	Frequenz
ξ	dimensionslose Koordinate $\frac{x}{l}$
π	Ludolphsche Zahl
Π_e	elektrischer Hertzscher Vektor
Π_m	magnetischer Hertzscher Vektor = Fitzgerald-Vektor
ρ, ρ_e	elektrische Raumladungsdichte
ρ_m	magnetische Raumladungsdichte
ρ_{magn}	fiktive magnetische Raumladungsdichte
σ	elektrische Flächenladungsdichte
σ_{magn}	fiktive magnetische Flächenladungsdichte
σ	Imaginärteil der Kreisfrequenz $\omega = \eta + i\sigma$
$\sum_{i=1}^n$	Summe von $i = 1$ bis $i = n$
Σ, Σ'	Bezugssysteme, Inertialsysteme
τ	dimensionslose Zeit
τ	relativistische Eigenzeit
τ	Flächendichte des elektrischen Dipolmoments
φ	Azimutwinkel bei Zylinder- und Kugelkoordinaten
φ	Phasenwinkel
φ	skalares Potential
Φ	skalares Potential
Φ	magnetischer Fluß
χ	elektrische Suszeptibilität
χ_m	magnetische Suszeptibilität
Ψ	Stromfunktion
Ψ	skalares magnetisches Potential
Ψ	quantenmechanische Wellenfunktion
ω	Winkelgeschwindigkeit, Kreisfrequenz $2\pi\nu$
ω_g	Grenzfrequenz
ω_{amp}	Eigenfrequenzen eines Hohlraumresonators (n, m, p ganze Zahlen)
Ω	elektrischer Fluß
Ω	Raumwinkel
Ω	dimensionslose Kreisfrequenz