

# Springer-Lehrbuch

---

## Grundkurs Theoretische Physik

---

Band 1

Klassische Mechanik

9. Auflage

ISBN: 978-3-642-12947-6

Band 2

Analytische Mechanik

8. Auflage

ISBN: 978-3-642-12949-0

Band 3

Elektrodynamik

8. Auflage

ISBN: 978-3-540-71251-0

Band 4

Spezielle Relativitätstheorie,  
Thermodynamik

7., aktualisierte Auflage

ISBN: 978-3-642-01603-5

Band 5/1

Quantenmechanik –  
Grundlagen

7. Auflage

ISBN: 978-3-540-68868-6

Band 5/2

Quantenmechanik –  
Methoden  
und Anwendungen

6., überarbeitete Auflage

ISBN: 978-3-540-26035-6

Band 6

Statistische Physik

6. Auflage

ISBN: 978-3-540-68870-9

Band 7

Viel-Teilchen-Theorie

7., aktualisierte Auflage

ISBN: 978-3-642-01605-9

Wolfgang Nolting

# **Grundkurs Theoretische Physik 2**

Analytische Mechanik

8., aktualisierte Auflage

 Springer

Professor Wolfgang Nolting  
Humboldt-Universität zu Berlin  
Institut für Physik  
Newtonstraße 15  
12489 Berlin  
Deutschland  
wolfgang.nolting@physik.hu-berlin.de

---

*Umschlagabbildung: siehe Seite 114*

---

ISSN 0937-7433

ISBN 978-3-642-12949-0

e-ISBN 978-3-642-12950-6

DOI 10.1007/978-3-642-12950-6

Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2002, 2004, 2006, 2011

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

*Einbandgestaltung:* WMXDesign GmbH, Heidelberg

*Satz und Herstellung:* le-tex publishing services GmbH, Leipzig

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media ([www.springer.de](http://www.springer.de))

## Allgemeines Vorwort

Die sieben Bände der Reihe „*Grundkurs Theoretische Physik*“ sind als direkte Begleiter zum Hochschulstudium Physik gedacht. Sie sollen in kompakter Form das wichtigste theoretisch-physikalische Rüstzeug vermitteln, auf dem aufgebaut werden kann, um anspruchsvollere Themen und Probleme im fortgeschrittenen Studium und in der physikalischen Forschung bewältigen zu können.

Die Konzeption ist so angelegt, dass der erste Teil des Kurses,

*Klassische Mechanik* (Band 1)

*Analytische Mechanik* (Band 2)

*Elektrodynamik* (Band 3)

*Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik* (Band 4),

als Theorieteil eines „*Integrierten Kurses*“ aus Experimentalphysik und Theoretischer Physik, wie er inzwischen an zahlreichen deutschen Universitäten vom ersten Semester an angeboten wird, zu verstehen ist. Die Darstellung ist deshalb bewusst ausführlich, manchmal sicher auf Kosten einer gewissen Eleganz, und in sich abgeschlossen gehalten, sodass der Kurs auch zum Selbststudium ohne Sekundärliteratur geeignet ist. Es wird nichts vorausgesetzt, was nicht an früherer Stelle der Reihe behandelt worden ist. Dies gilt insbesondere auch für die benötigte Mathematik, die vollständig so weit entwickelt wird, dass mit ihr theoretisch-physikalische Probleme bereits vom Studienbeginn an gelöst werden können. Dabei werden die mathematischen Einschübe immer dann eingefügt, wenn sie für das weitere Vorgehen im Programm der Theoretischen Physik unverzichtbar werden. Es versteht sich von selbst, dass in einem solchen Konzept nicht alle mathematischen Theorien mit absoluter Strenge bewiesen und abgeleitet werden können. Da muss bisweilen ein Verweis auf entsprechende mathematische Vorlesungen und vertiefende Lehrbuchliteratur erlaubt sein. Ich habe mich aber trotzdem um eine halbwegs abgerundete Darstellung bemüht, sodass die mathematischen Techniken nicht nur angewendet werden können, sondern dem Leser zumindest auch plausibel erscheinen.

Die mathematischen Einschübe werden natürlich vor allem in den ersten Bänden der Reihe notwendig, die den Stoff bis zum Physik-Vordiplom beinhalten. Im zweiten Teil des Kurses, der sich mit den modernen Disziplinen der Theoretischen Physik befasst,

*Quantenmechanik: Grundlagen* (Band 5/1)

*Quantenmechanik: Methoden und Anwendungen* (Band 5/2)

*Statistische Physik* (Band 6)

*Viel-Teilchen-Theorie* (Band 7),

sind sie weitgehend überflüssig geworden, insbesondere auch deswegen, weil im Physik-Studium inzwischen die Mathematik-Ausbildung Anschluss gefunden hat. Der frühe Beginn der Theorie-Ausbildung bereits im ersten Semester gestattet es,

die *Grundlagen der Quantenmechanik* schon vor dem Vordiplom zu behandeln. Der Stoff der letzten drei Bände kann natürlich nicht mehr Bestandteil eines „*Integrierten Kurses*“ sein, sondern wird wohl überall in reinen Theorie-Vorlesungen vermittelt. Das gilt insbesondere für die „*Viel-Teilchen-Theorie*“, die bisweilen auch unter anderen Bezeichnungen wie „*Höhere Quantenmechanik*“ etwa im achten Fachsemester angeboten wird. Hier werden neue, über den Stoff des Grundstudiums hinausgehende Methoden und Konzepte diskutiert, die insbesondere für korrelierte Systeme aus vielen Teilchen entwickelt wurden und für den erfolgreichen Übergang zu wissenschaftlichem Arbeiten (Diplom, Promotion) und für das Lesen von Forschungsliteratur inzwischen unentbehrlich geworden sind.

In allen Bänden der Reihe „*Grundkurs Theoretische Physik*“ sollen zahlreiche Übungsaufgaben dazu dienen, den erlernten Stoff durch konkrete Anwendungen zu vertiefen und richtig einzusetzen. Eigenständige Versuche, abstrakte Konzepte der Theoretischen Physik zur Lösung realer Probleme aufzubereiten, sind absolut unverzichtbar für den Lernenden. Ausführliche Lösungsanleitungen helfen bei größeren Schwierigkeiten und testen eigene Versuche, sollten aber nicht dazu verleiten, „*aus Bequemlichkeit*“ eigene Anstrengungen zu unterlassen. Nach jedem größeren Kapitel sind Kontrollfragen angefügt, die dem Selbsttest dienen und für Prüfungsvorbereitungen nützlich sein können.

Ich möchte nicht vergessen, an dieser Stelle allen denen zu danken, die in irgendeiner Weise zum Gelingen dieser Buchreihe beigetragen haben. Die einzelnen Bände sind letztlich auf der Grundlage von Vorlesungen entstanden, die ich an den Universitäten in Münster, Würzburg, Osnabrück, Valladolid (Spanien), Warangal (Indien) sowie in Berlin gehalten habe. Das Interesse und die konstruktive Kritik der Studenten bedeuteten für mich entscheidende Motivation, die Mühe der Erstellung eines doch recht umfangreichen Manuskripts als sinnvoll anzusehen. In der Folgezeit habe ich von zahlreichen Kollegen wertvolle Verbesserungsvorschläge erhalten, die dazu geführt haben, das Konzept und die Ausführung der Reihe weiter auszubauen und aufzuwerten.

Die ersten Auflagen dieser Buchreihe sind im Verlag Zimmermann-Neufang entstanden. Ich kann mich an eine sehr faire und stets erfreuliche Zusammenarbeit erinnern. Danach erschien die Reihe bei Vieweg. Die Übernahme der Reihe durch den Springer-Verlag im Januar 2001 hat dann zu weiteren professionellen Verbesserungen im Erscheinungsbild des „*Grundkurs Theoretische Physik*“ geführt. Herrn Dr. Kölsch und seinem Team bin ich schon jetzt für viele Vorschläge und Anregungen sehr dankbar. Meine Manuskripte scheinen in guten Händen zu liegen.

Berlin, im April 2001

Wolfgang Nolting

## Vorwort zu Band 2

Das Anliegen der Klassischen Mechanik besteht in dem Aufstellen und Lösen von Bewegungsgleichungen für

*Massenpunkte, Systeme von Massenpunkten, Starre Körper*

auf der Grundlage möglichst weniger

*Axiome und Prinzipien.*

Letztere sind mathematisch nicht streng beweisbar, sondern stellen lediglich bislang widerspruchsfreie Erfahrungstatsachen dar. Man könnte natürlich fragen, warum man sich heute noch mit Klassischer Mechanik beschäftigt, obwohl diese doch wohl in den seltensten Fällen noch einen direkten Bezug zur aktuellen Forschung aufweist. Sie bildet jedoch die unerlässliche Basis für die modernen Richtungen der Theoretischen Physik, d. h., diese bauen auf der Klassischen Mechanik auf und sind ohne sie nicht verständlich zu machen. Ferner gestattet sie im Zusammenhang mit relativ vertrauten Fragestellungen eine gewisse „Gewöhnung“ an mathematische Lösungsverfahren. So haben wir im ersten Band dieses „*Grundkurs Theoretische Physik*“ im Zusammenhang mit der *Newton-Mechanik* den Einsatz der Vektoralgebra intensiv geübt.

Warum befassen wir uns in diesem zweiten Band nun aber noch einmal mit Klassischer Mechanik? Die „*Analytische Mechanik*“ des vorliegenden zweiten Bandes behandelt die Formulierungen nach *Lagrange*, *Hamilton* und *Hamilton-Jacobi*, die gegenüber der *Newton-Mechanik* zwar keine „*neue Physik*“ beinhalten, methodisch jedoch eleganter sind und einen direkteren Bezug zu weiterführenden Disziplinen der Theoretischen Physik, wie der Quantenmechanik, erkennen lassen.

Die Zielsetzung des vorliegenden Bandes 2 entspricht der des gesamten Grundkurses: Theoretische Physik. Es soll sich um einen direkten Begleiter des Grundstudiums zum Physik-Diplom bzw. des Bachelor/Master-Studienprogramms handeln, der es ermöglicht, Techniken und Konzepte der Theoretischen Physik zunächst ohne aufwendige Sekundärliteratur verstehen zu lernen. Zum Verständnis des Textes wird lediglich das in Band 1 Erarbeitete vorausgesetzt. Mathematische Einschübe werden immer dann in kompakter und zweckgerichteter Form gebracht und geübt, wenn es für die weitere Entwicklung der Theorie unerlässlich erscheint.

Das Manuskript zu diesem Buch ist aus mehreren Vorlesungen entstanden, die ich in der Vergangenheit an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster und der Humboldt-Universität zu Berlin gehalten habe. Nach seinem Erscheinen, zunächst im Verlag Zimmermann-Neufang, dann später und bis heute im Springer-Verlag, haben mir zahlreiche Studierende und Dozenten durch Vorschläge zur Verbesserung einzelner Passagen sehr geholfen. Dafür möchte ich mich ganz herzlich bedanken. Die jetzt vorliegende 8. Auflage besitzt gegenüber den früheren Auflagen ein stark

erweitertes Aufgabenangebot. Die Zusammenarbeit mit dem Springer-Verlag, insbesondere mit Herrn Dr. T. Schneider, war stets fair und konstruktiv und deshalb sehr erfreulich.

Berlin, im September 2010

*Wolfgang Nolting*



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Lagrange-Mechanik</b>	
1.1	Zwangsbedingungen, generalisierte Koordinaten .....	3
1.2	Das d'Alembert'sche Prinzip .....	12
1.2.1	Lagrange-Gleichungen .....	12
1.2.2	Einfache Anwendungen .....	21
1.2.3	Verallgemeinerte Potentiale .....	31
1.2.4	Reibung .....	34
1.2.5	Nicht-holonome Systeme .....	37
1.2.6	Anwendungen der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren .....	40
1.2.7	Aufgaben .....	45
1.3	Das Hamilton'sche Prinzip .....	60
1.3.1	Formulierung des Prinzips .....	61
1.3.2	Elemente der Variationsrechnung .....	64
1.3.3	Lagrange-Gleichungen .....	71
1.3.4	Erweiterung des Hamilton'schen Prinzips .....	74
1.3.5	Aufgaben .....	77
1.4	Erhaltungssätze .....	79
1.4.1	Homogenität der Zeit .....	81
1.4.2	Homogenität des Raumes .....	84
1.4.3	Isotropie des Raumes .....	87
1.4.4	Aufgaben .....	90
1.5	Kontrollfragen .....	92
<b>2</b>	<b>Hamilton-Mechanik</b>	
2.1	Legendre-Transformation .....	98
2.1.1	Aufgaben .....	101
2.2	Kanonische Gleichungen .....	101
2.2.1	Hamilton-Funktion .....	101
2.2.2	Einfache Beispiele .....	105
2.2.3	Aufgaben .....	111
2.3	Wirkungsprinzipien .....	112
2.3.1	Modifiziertes Hamilton'sches Prinzip .....	112
2.3.2	Prinzip der kleinsten Wirkung .....	115
2.3.3	Fermat'sches Prinzip .....	119
2.3.4	Jacobi-Prinzip .....	120
2.4	Poisson-Klammer .....	125

2.4.1	Darstellungsräume .....	125
2.4.2	Fundamentale Poisson-Klammern.....	129
2.4.3	Formale Eigenschaften .....	132
2.4.4	Integrale der Bewegung .....	134
2.4.5	Bezug zur Quantenmechanik .....	135
2.4.6	Aufgaben.....	137
2.5	Kanonische Transformationen .....	140
2.5.1	Motivation .....	140
2.5.2	Die erzeugende Funktion .....	145
2.5.3	Äquivalente Formen der erzeugenden Funktion.....	148
2.5.4	Beispiele kanonischer Transformationen.....	152
2.5.5	Kriterien für Kanonizität.....	156
2.5.6	Aufgaben.....	158
2.6	Kontrollfragen .....	163
<b>3</b>	<b>Hamilton-Jacobi-Theorie</b>	
3.1	Hamilton-Jacobi-Gleichung .....	170
3.2	Die Lösungsmethode .....	173
3.3	Hamilton'sche charakteristische Funktion.....	178
3.4	Separation der Variablen .....	181
3.5	Wirkungs- und Winkelvariable .....	187
3.5.1	Periodische Systeme.....	187
3.5.2	Wirkungs- und Winkelvariable.....	190
3.5.3	Das Kepler-Problem .....	194
3.5.4	Entartung.....	201
3.5.5	Bohr-Sommerfeld'sche Atomtheorie .....	203
3.6	Der Übergang zur Wellenmechanik .....	204
3.6.1	Wellengleichung der Klassischen Mechanik .....	205
3.6.2	Einschub über Lichtwellen.....	209
3.6.3	Der Ansatz der Wellenmechanik.....	211
3.7	Aufgaben .....	214
3.8	Kontrollfragen .....	216
	<b>Lösungen der Übungsaufgaben</b> .....	219
	<b>Sachverzeichnis</b> .....	325