

Mathematische Probleme lösen mit MAPLE

Thomas Westermann

Mathematische Probleme lösen mit MAPLE

Ein Kurzeinstieg

4., aktualisierte Auflage

 Springer

Professor Dr. Thomas Westermann
Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
Postfach 2440
76012 Karlsruhe
Deutschland

thomas.westermann@hs-karlsruhe.de
<http://www.home.hs-karlsruhe.de/~weth0002>

Homepage zum Buch
<http://www.home.hs-karlsruhe.de/~weth0002/buecher/mpgmm/start.htm>

ISBN 978-3-642-12150-0 e-ISBN 978-3-642-12151-7
DOI 10.1007/978-3-642-12151-7
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003, 2006, 2008, 2011

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandentwurf: KüenkelLopka GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort zur 4. Auflage

Die erfolgreiche Aufnahme des Buchs und die positive Resonanz haben uns bewogen, die Art der Darstellung sowie das interaktive Konzept in Form einer verlinkten pdf-Version auf der CD-Rom unverändert zu belassen:

Die CD-Rom enthält eine erweiterte pdf-Version des gedruckten Buches, bei dem jeder Befehl einen Link auf das entsprechende elektronische Arbeitsblatt von Maple (Worksheet) enthält. Man kann dadurch die Worksheets direkt aus der pdf-Version starten. Somit wird ein schneller, übersichtlicher Zugriff auf die entsprechenden Themen ermöglicht. Alle Probleme werden an jeweils einem Beispiel exemplarisch vorgeführt. Die elektronischen Arbeitsblätter sind so flexibel gestaltet, dass sie an die eigenen Problemstellungen einfach angepasst werden können.

Für diese vierte Auflage wurde das Buch um das Kapitel über partielle Differentialgleichungen erweitert; die pdf-Version darüber hinaus um das Kapitel über das Lösen von großen linearen Gleichungssystemen. Dieses Kapitel enthält die Beschreibung von Maple-Prozeduren sowohl für die direkten Verfahren (Thomas-Algorithmus, Cholesky-Zerlegung und Cholesky-Verfahren) auch Prozeduren für das iterative Lösen von großen linearen Gleichungssystemen (Jacobi-, Gauß-Seidel- und SOR-Verfahren sowie die Methode der konjugierten Gradienten). Darüber hinaus wurde das Layout an Maple angepasst, indem nun im Text die Maple-Befehle in roter Farbe hervorgehoben werden.

Alle Maple-Beschreibungen, alle elektronischen Arbeitsblätter sowie die Einführung in die Maple-Benutzeroberflächen (Anhang A) wurden an Maple 14 angepasst. Maple 14 wird daher als Version empfohlen, aber nahezu alle Arbeitsblätter auf der CD-Rom sind ab Maple 9 lauffähig. Um den Einstieg in Maple zu erleichtern sind neu auf der CD-Rom

- eine Einführung in Maple,
- Aufgaben zur Einführung einschließlich der Lösungen
- sowie Anwendungsaufgaben mit Lösungen, bei denen es insbesondere um die graphische Umsetzung von Gesetzen und Formeln geht.

Für Maple 14 existieren zwei unterschiedliche Benutzeroberflächen: Zum Einen das klassische Layout „classic worksheet“ (*maple\bin.win\cwmaple.exe*) und zum Anderen das standardmäßig geöffnete, auf Java basierende Layout „standard worksheet“ (*maple\bin.win\maplew.exe*). Die Worksheets sind unter beiden Ober-

flächen uneingeschränkt lauffähig. Alleine die auf dem lokalen Rechner gesetzte Verknüpfung entscheidet, welche Maple-Variante gestartet wird. Im Anhang A wird auf die Benutzeroberfläche von Maple 14 eingegangen und die Möglichkeiten aufgezeigt, wie man mit der symbolorientierten Oberfläche arbeitet.

Obwohl die interaktive pdf-Version auf der CD-Rom, die zahlreichen Links und vielen Verknüpfungen sowie die 145 elektronischen Arbeitsblätter mehrfach getestet und erprobt wurden, lassen sich kleinere Fehler nicht vermeiden. Über Hinweise auf noch vorhandene Fehler ist der Autor dankbar. Aber auch Verbesserungsvorschläge, nützliche Hinweise und Anregungen sind sehr erwünscht und können mir über

thomas.westermann@hs-karlsruhe.de

zugesendet werden.

Um zukünftig mit neuen Maple-Versionen Schritt halten zu können, werden Updates der Worksheets unter der Homepage zum Buch

<http://www.home.hs-karlsruhe.de/~weth0002/buecher/mpgmm/start.htm>

zur Verfügung gestellt.

Ich möchte mich an dieser Stelle für die Unterstützung von Maplesoft Europa vor allem bei Frau Bormann und Herrn Richard recht herzlich bedanken. Mein Dank gilt besonders Frau Hestermann-Beyerle und Frau Kollmar-Thoni vom Springer-Verlag für die gute Zusammenarbeit.

Karlsruhe, im Juli 2010

Thomas Westermann

Vorwort zur 1. Auflage

Das vorliegende Werk richtet sich sowohl an Studenten von technischen Hochschulen und Fachhochschulen als Begleitung und Ergänzung zu den Mathematikvorlesungen als auch an Praktiker, die ihre konkreten mathematischen Probleme direkt am Computer lösen möchten. Gleichzeitig ist das Buch eine themengebundene Einführung in die Nutzung des Computeralgebrasystems Maple, welche sich an konkreten Problemstellungen orientiert.

Grundlegende mathematische Probleme wie z.B. das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen, dreidimensionale graphische Darstellungen von Funktionen, Nullstellenbestimmungen, Ableitungen von Funktionen, Finden von Stammfunktionen, Rechnen mit komplexen Zahlen, Integraltransformationen, Lösen von Differentialgleichungen, Vektorrechnung usw. kommen in den Anwendungen immer wieder vor, sind aber teilweise sehr aufwendig und zu umfangreich, um sie per Hand zu lösen. „Mathematische Probleme lösen mit Maple“ ist als Handbuch gedacht, diese elementaren Probleme analytisch und numerisch zu behandeln.

Das Buch ist so konzipiert, dass diese mathematischen Probleme direkt am Computer ohne große Vorkenntnisse mit Maple gelöst werden können. Dabei werden nur grundlegende Erfahrungen im Umgang mit Windowsprogrammen vorausgesetzt.

Die beiliegende CD-ROM soll einen schnellen Zugriff auf die entsprechenden Maple-Befehle liefern. Alle Probleme werden an jeweils einem Beispiel exemplarisch vorgeführt. Die elektronischen Arbeitsblätter sind so flexibel gestaltet, dass sie an die eigenen Problemstellungen einfach angepasst werden können.

Das Buch ist sowohl als Nachschlagewerk bzw. die CD-ROM zur Überprüfung von Übungsaufgaben geeignet als auch eine sehr kompakte problemorientierte Darstellung der Lösungen mit Maple. Daher ergibt sich die übersichtliche Struktur der einzelnen Abschnitte:

- Jedes Thema wird mathematisch beschrieben.
- Das Problem wird mit Maple gelöst.
- Die Syntax des Maple-Befehls wird erläutert.
- Ein Beispielaufruf wird angegeben.
- Hinweise behandeln Besonderheiten des Befehls oder der Ausgabe.

Mein Dank gilt dem Springer-Verlag für die sehr angenehme und reibungslose Zusammenarbeit, besonders Frau Hestermann-Beyerle und Frau Lempe. Ganz besonders bedanken möchte ich mich bei meinen Töchtern Veronika und Juliane, die mich tatkräftig und zeitintensiv bei diesem neuerlichen Projekt unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1: Rechnen mit Zahlen.....	1
1.1 Rechnen mit reellen Zahlen	2
1.2 Berechnen von Summen und Produkten	3
1.3 Primfaktorzerlegung	4
1.4 Größter gemeinsamer Teiler	4
1.5 Kleinstes gemeinsames Vielfaches	5
1.6 n -te Wurzel einer reellen Zahl	5
1.7 Logarithmus	6
1.8 Darstellung komplexer Zahlen.....	7
1.9 Rechnen mit komplexen Zahlen	8
1.10 Berechnen von komplexen Wurzeln	9
Kapitel 2: Umformen von Ausdrücken.....	10
2.1 Auswerten von Ausdrücken	10
2.2 Vereinfachen von Ausdrücken.....	11
2.3 Expandieren von Ausdrücken	12
2.4 Konvertieren eines Ausdrucks	12
2.5 Kombinieren von Ausdrücken	13
Kapitel 3: Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme	14
3.1 Lösen einer Gleichung	15
3.2 Näherungsweise Lösen einer Gleichung	16
3.3 Lösen einer Ungleichung	17
3.4 Lösen von linearen Gleichungssystemen	18
Kapitel 4: Vektoren, Matrizen und Eigenwerte.....	19
4.1 Vektoren	20
4.2 Vektorrechnung	21
4.3 Winkel zwischen zwei Vektoren	22
4.4 Matrizen	23
4.5 Matrizenrechnung	24
4.6 Determinante.....	25
4.7 Wronski-Determinante.....	26
4.8 Rang einer $(m \times n)$ -Matrix	27
4.9 Eigenwerte und Eigenvektoren	28
4.10 Charakteristisches Polynom.....	29
Kapitel 5: Vektoren im \mathbb{R}^n	30
5.1 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren (LGS).....	30
5.2 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren (Rang)	31
5.3 Basis des \mathbb{R}^n	32
5.4 Dimension eines Unterraums	33

Kapitel 6: Affine Geometrie	34
6.1 Definition von Punkt, Gerade und Ebene	34
6.2 Schnitte von Geraden und Ebenen	36
6.3 Abstände von Punkten, Geraden und Ebenen	37
6.4 Definition und Darstellung von Kugeln (Sphären)	38
6.5 Schnittpunkte einer Sphäre mit einer Geraden	40
6.6 Tangentialebene an Sphäre durch eine Gerade	41
Kapitel 7: Definition von Funktionen	43
7.1 Elementare Funktionen	43
7.2 Auswerten elementarer Funktionen	44
7.3 Definition von Funktionen	45
7.4 Definition zusammengesetzter Funktionen	46
Kapitel 8: Graphische Darstellung von Funktionen in einer Variablen	47
8.1 Darstellung von Funktionen in einer Variablen	48
8.2 Mehrere Schaubilder	50
8.3 Darstellen von Kurven mit Parametern	51
8.4 Ortskurven	52
8.5 Bode-Diagramm	53
8.6 Logarithmische Darstellung von Funktionen	54
Kapitel 9: Graphische Darstellung von Funktionen in mehreren Variablen	55
9.1 Darstellung einer Funktion $f(x,y)$ in zwei Variablen	56
9.2 Animation einer Funktion $f(x,t)$	58
9.3 Animation einer Funktion $f(x,y,t)$	59
9.4 Der neue animate-Befehl	60
9.5 Darstellung von Rotationskörpern bei Rotation um die x -Achse	62
Kapitel 10: Einlesen, Darstellen und Analysieren von Messdaten	64
10.1 Einlesen und Darstellen von Messdaten	65
10.2 Logarithmische Darstellung von Wertepaaren	66
10.3 Berechnung des arithmetischen Mittelwertes	67
10.4 Berechnung der Varianz	67
10.5 Interpolationspolynom	68
10.6 Kubische Spline-Interpolation	69
10.7 Korrelationskoeffizient	70
10.8 Ausgleichsfunktion	71
Kapitel 11: Funktionen in einer Variablen	73
11.1 Bestimmung von Nullstellen	73
11.2 Linearfaktorzerlegung von Polynomen	74
11.3 Partialbruchzerlegung gebrochenrationaler Funktionen	75
11.4 Asymptotisches Verhalten	76
11.5 Kurvendiskussion	77
11.6 Taylor-Polynom einer Funktion	80

Kapitel 12: Funktionen in mehreren Variablen.....	81
12.1 Totales Differential	81
12.2 Tangentialebene	82
12.3 Fehlerrechnung	83
12.4 Taylor-Entwicklung einer Funktion mit mehreren Variablen.....	84
Kapitel 13: Grenzwerte und Reihen	85
13.1 Bestimmung von Folggrenzwerten	85
13.2 Bestimmung von Grenzwerten rekursiver Folgen	86
13.3 Bestimmung von Funktionsgrenzwerten	87
13.4 Konvergenz von Zahlenreihen: Quotientenkriterium	88
13.5 Konvergenz von Potenzreihen: Konvergenzradius.....	89
Kapitel 14: Differentiation.....	90
14.1 Ableitung eines Ausdrucks in einer Variablen.....	90
14.2 Ableitung einer Funktion in einer Variablen	91
14.3 Numerische Differentiation	92
14.4 Partielle Ableitungen eines Ausdrucks in mehreren Variablen.....	93
14.5 Partielle Ableitungen einer Funktion in mehreren Variablen	94
Kapitel 15: Integration.....	95
15.1 Integration einer Funktion in einer Variablen.....	95
15.2 Numerische Integration einer Funktion in einer Variablen.....	96
15.3 Mantelfläche und Volumen von Rotationskörper bei x -Achsenrotation..	97
15.4 Mantelfläche und Volumen von Rotationskörper bei y -Achsenrotation..	98
15.5 Mehrfachintegrale einer Funktion in mehreren Variablen	99
15.6 Linienintegrale	100
Kapitel 16: Fourier-Reihen und FFT.....	102
16.1 Fourier-Reihen (analytisch)	103
16.2 Fourier-Reihen (numerisch).....	105
16.3 Komplexe Fourier-Reihe und Amplitudenspektrum.....	107
16.4 FFT	109
Kapitel 17: Integraltransformationen.....	111
17.1 Laplace-Transformation.....	111
17.2 Inverse Laplace-Transformation	112
17.3 Lösen von DG mit der Laplace-Transformation	113
17.4 Fourier-Transformation.....	114
17.5 Inverse Fourier-Transformation.....	115
17.6 Lösen von DG mit der Fourier-Transformation.....	116
Kapitel 18: Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung	117
18.1 Richtungsfelder	118
18.2 Analytisches Lösen	119
18.3 Numerisches Lösen.....	120
18.4 Numerisches Lösen mit dem Euler-Verfahren.....	121
18.5 Numerisches Lösen mit dem Prädiktor-Korrektor-Verfahren.....	122

Kapitel 19: Gewöhnliche Differentialgleichungs-Systeme	124
19.1 Analytisches Lösen von DGS 1. Ordnung	124
19.2 Numerisches Lösen von DGS 1. Ordnung	126
19.3 Numerisches Lösen von DGS 1. Ordnung mit dem Euler-Verfahren....	128
Kapitel 20: Gewöhnliche Differentialgleichungen n-ter Ordnung	130
20.1 Analytisches Lösen	130
20.2 Numerisches Lösen	132
Kapitel 21: Extremwerte und Optimierung	134
21.1 Lösen von überbestimmten linearen Gleichungssystemen	134
21.2 Lineare Optimierung	136
21.3 Extremwerte nichtlinearer Funktionen	137
Kapitel 22: Vektoranalysis	138
22.1 Gradient	138
22.2 Rotation	139
22.3 Divergenz	140
22.4 Potentialfeld zu gegebenem Vektorfeld, Wirbelfreiheit	141
22.5 Vektorpotential zu gegebenem Vektorfeld, Quellenfreiheit	142
Kapitel 23: Partielle Differentialgleichungen	143
23.1 Analytisches Lösen pDG erster Ordnung	143
23.2 Numerisches Lösen zeitbasierter pDG 1. Ordnung	145
23.3 Analytisches Lösen pDG n -ter Ordnung	147
23.4 Numerisches Lösen zeitbasierter pDG n -ter Ordnung	149
Kapitel 24: Programmstrukturen	151
24.1 for-Schleife	151
24.2 while-Schleife	152
24.3 if-Bedingungen	153
24.4 proc-Konstruktion	154
Kapitel 25: Programmieren mit Maple	156
25.1 Newton-Verfahren: for-Konstruktion	157
25.2 Newton-Verfahren: while-Konstruktion	158
25.3 Newton-Verfahren: proc-Konstruktion 1	159
25.4 Newton-Verfahren: proc-Konstruktion 2	160
Anhang A: Benutzeroberflächen von Maple	163
Anhang B: Die CD-Rom	174
Literaturverzeichnis	176
Index	177
Index	177
Maple-Befehle	179