

MATHÉMATIQUES  
&  
APPLICATIONS

Directeurs de la collection :  
G. Allaire et J. Garnier

67

# MATHÉMATIQUES & APPLICATIONS

## Comité de Lecture 2008–2011/Editorial Board 2008–2011

RÉMI ABGRALL  
INRIA et Mathématiques, Univ. Bordeaux 1, FR  
abgrall@math.u-bordeaux.fr

GRÉGOIRE ALLAIRE  
CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, FR  
gregoire.allaire@polytechnique.edu

MICHEL BENAÏM  
Mathématiques, Univ. de Neuchâtel, CH  
michel.benaïm@unine.ch

OLIVIER CATONI  
Proba. et Mod. Aléatoires, Univ. Paris 6, FR  
catoni@ccr.jussieu.fr

THIERRY COLIN  
Mathématiques, Univ. Bordeaux 1, FR  
colin@math.u-bordeaux1.fr

MARIE-CHRISTINE COSTA  
UMA, ENSTA, Paris, FR  
marie-christine.costa@ensta.fr

ARNAUD DEBUSSCHE  
ENS Cachan, Antenne de Bretagne  
Avenue Robert Schumann,  
35170 Bruz, FR  
arnaud.debussche@bretagne.ens-cachan.fr

JACQUES DEMONGEOT  
TIMC, IMAG, Univ. Grenoble I, FR  
jacques.demongeot@imag.fr

NICOLE EL KAROUI  
CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, FR  
elkaroui@cmapp.polytechnique.fr

JOSSELIN GARNIER  
Proba. et Mod. Aléatoires, Univ. Paris 6 et 7, FR  
garnier@math.jussieu.fr

STÉPHANE GAUBERT  
INRIA, Saclay, Îles-de-France, Orsay et  
CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, FR  
stephane.gaubert@inria.fr

CLAUDE LE BRIS  
CERMICS, ENPC et INRIA  
Marne la Vallée, FR  
lebris@cermics.enpc.fr

CLAUDE LOBRY  
INRA, INRIA, Sophia-Antipolis et  
Analyse Systèmes et Biométrie  
Montpellier, FR  
lobrinria@wanadoo.fr

LAURENT MICLO  
Analyse, Topologie et Proba., Univ. Provence, FR  
miclo@cmi.univ-mrs.fr

FELIX OTTO  
Institute for Applied Mathematics  
University of Bonn, DE  
otto@iam.uni-bonn.de

VALÉRIE PERRIER  
Mod. et Calcul, ENSIMAG, Grenoble, FR  
valerie.perrier@imag.fr

BERNARD PRUM  
Statist. et Génome, CNRS, INRA, Univ. Evry, FR  
bernard.prum@genopole.cnrs.fr

PHILIPPE ROBERT  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, FR  
philippe.robert@inria.fr

PIERRE ROUCHON  
Automatique et Systèmes, École Mines, Paris, FR  
pierre.rouchon@ensmp.fr

ANNICK SARTENAER  
Mathématiques, Univ. Namur, BE  
annick.sartenaer@fundp.ac.be

ERIC SONNENDRÜCKER  
IRMA, Strasbourg, FR  
sonnen@math.u-strasbg.fr

SYLVAIN SORIN  
Combinat. et Optimisation, Univ. Paris 6, FR  
sorin@math.jussieu.fr

ALAIN TROUVÉ  
CMLA, ENS Cachan, FR  
trouve@cmla.ens-cachan.fr

CÉDRIC VILLANI  
UMPA, ENS Lyon, FR  
cedric.villani@umpa.ens-lyon.fr

ENRIQUE ZUAZUA  
Basque Center for Applied  
Mathematics, Bilbao, Basque, ES  
enrique.zuazua@uam.es

Directeurs de la collection :  
G. ALLAIRE et J. GARNIER

Instructions aux auteurs :

Les textes ou projets peuvent être soumis directement à l'un des membres du comité de lecture avec copie à G. ALLAIRE ou J. GARNIER. Les manuscrits devront être remis à l'Éditeur sous format  $\LaTeX$ 2 $\epsilon$  (cf. <ftp://ftp.springer.de/pub/tex/latex/svmonot1/>).

Walter Tinsson

Plans d'expérience:  
constructions et analyses  
statistiques

 Springer

Walter Tinsson  
Université de Pau et des Pays de l'Adour  
Laboratoire de Mathématiques et leurs Applications  
UMR CNRS 5142 - Bâtiment IPRA  
Avenue de l'Université  
BP 1155  
64013 Pau Cedex, France  
walter.tinsson@univ-pau.fr

ISSN 1154-483X  
ISBN 978-3-642-11471-7      e-ISBN 978-3-642-11472-4  
DOI 10.1007/978-3-642-11472-4  
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Library of Congress Control Number: 2010922453

Mathematics Subject Classification (2000): 62K, 62J, 05B05, 05B15, 05B20

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 interdit les copies ou les reproductions destinées à une utilisation collective.

Toute représentation, reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

*Maquette de couverture:* SPi Publisher Services

Imprimé sur papier non acide

Springer est membre du groupe Springer Science+BusinessMedia (www.springer.com)

---

# Table des matières

---

## Partie I Généralités

---

<b>1</b>	<b>La notion de plan d'expérience</b>	<b>3</b>
1.1	Introduction	3
1.2	La démarche de planification expérimentale	4
1.2.1	Objectifs	4
1.2.2	Réponse	4
1.2.3	Facteurs	5
1.2.4	Domaine expérimental	6
1.2.5	Réalisation des expériences	7
1.3	Historique	14
1.4	Guide de lecture de l'ouvrage	15
1.4.1	Positionnement	15
1.4.2	Structure	16
1.4.3	Analyse des exemples	19
1.5	Thèmes non abordés dans l'ouvrage	20
1.5.1	Plans pour modèles mixtes	21
1.5.2	Plans pour modèles non linéaires	21
1.5.3	Plans à effets de voisinage	22
1.5.4	Plans d'expérience numériques	23
1.6	Logiciels pour les plans d'expérience	23
1.7	Présentation d'une étude	24
1.7.1	Facteurs et réponse	25
1.7.2	Domaine expérimental	25
1.7.3	Codage des facteurs	26
1.7.4	Plan d'expérience utilisé	26
1.7.5	Ajustement d'un modèle d'ordre un	28
1.7.6	Ajustement d'un modèle à effets d'interactions	30
1.7.7	Ajustement d'un modèle d'ordre deux	32
1.7.8	Recherche des conditions optimales	35
1.7.9	Conclusion	36

<b>2</b>	<b>Outils mathématiques pour les plans d'expérience</b>	39
2.1	Introduction	39
2.2	Algèbre	40
2.2.1	Calcul matriciel	40
2.2.2	Projection orthogonale	41
2.2.3	Analyse spectrale	41
2.2.4	Matrices particulières	42
2.2.5	Notion de groupe	43
2.3	Probabilités	43
2.3.1	Variables aléatoires réelles	43
2.3.2	Vecteurs aléatoires	44
2.4	Statistiques	45
2.4.1	Notion d'estimateur	45
2.4.2	Modèle statistique	46
2.4.3	Modélisation linéaire	47
2.4.4	Estimation au sens des moindres carrés	49
2.4.5	Prédiction de la réponse moyenne	50
2.5	Analyse de la variance	51
2.5.1	Décomposition fondamentale	51
2.5.2	Coefficient de corrélation linéaire multiple	53
2.5.3	Estimation de $\sigma^2$	54
2.5.4	Décomposition plus fine de SSE	55
2.6	Tests d'hypothèses	58
2.6.1	Exemple introductif	58
2.6.2	Cas général	59
2.6.3	Test de validité du modèle	60
2.6.4	Test de significativité des paramètres	61
2.6.5	Test d'ajustement du modèle	62
2.6.6	Exemples	63
2.7	(Compléments) Démonstrations	69

---

## Partie II Plans d'expérience pour facteurs quantitatifs

---

<b>3</b>	<b>Plans d'expérience pour modèles d'ordre un</b>	77
3.1	Introduction	77
3.2	Généralités	78
3.2.1	Variables codées	78
3.2.2	Modèle utilisé	79
3.2.3	Moments d'un plan d'expérience	79
3.2.4	Plans d'expérience usuels	80
3.3	Plans factoriels complets	82
3.3.1	Définition	82

3.3.2	Propriétés . . . . .	84
3.3.3	Intérêt des réplifications centrales . . . . .	85
3.4	Fractions régulières de plans factoriels . . . . .	86
3.4.1	Exemple . . . . .	86
3.4.2	Contrastes et produit d'Hadamard . . . . .	87
3.4.3	Générateurs d'une fraction régulière . . . . .	89
3.4.4	Fractions régulières de résolution III . . . . .	92
3.4.5	Taille des plans factoriels . . . . .	93
3.5	Plans simplexes . . . . .	94
3.5.1	Définition . . . . .	94
3.5.2	Propriétés . . . . .	96
3.6	Plans de Plackett et Burman . . . . .	97
3.6.1	Définition . . . . .	97
3.6.2	Propriétés . . . . .	99
3.7	Exemple d'application . . . . .	99
3.8	Résumé . . . . .	106
3.9	(Compléments) Démonstrations . . . . .	109
<b>4</b>	<b>Plans d'expérience pour modèles à effets d'interactions . . . . .</b>	<b>115</b>
4.1	Introduction . . . . .	115
4.2	Généralités . . . . .	116
4.2.1	Modèle utilisé . . . . .	116
4.2.2	Plans d'expérience usuels . . . . .	117
4.3	Plans factoriels complets . . . . .	118
4.4	Fractions régulières de plans factoriels . . . . .	120
4.4.1	Fractions régulières de résolution V . . . . .	120
4.4.2	Taille des plans factoriels . . . . .	121
4.5	Généralisation à des interactions quelconques . . . . .	122
4.5.1	Modèle à effets d'interactions d'ordre 3 . . . . .	122
4.5.2	Modèle contenant tous les effets d'interactions . . . . .	125
4.5.3	Application aux fractions de résolution III . . . . .	127
4.6	Utilisation de modèles incomplets . . . . .	129
4.7	Exemple d'application . . . . .	133
4.8	Résumé . . . . .	143
4.9	(Compléments) Démonstrations . . . . .	147
<b>5</b>	<b>Plans d'expérience pour surfaces de réponse . . . . .</b>	<b>151</b>
5.1	Introduction . . . . .	151
5.2	Généralités . . . . .	152
5.2.1	Modèle utilisé . . . . .	152
5.2.2	Plans d'expérience usuels . . . . .	153
5.2.3	Inversion de la matrice des moments d'un plan usuel . . . . .	154
5.2.4	Estimations et prédictions . . . . .	155
5.2.5	Isovariance par transformations orthogonales . . . . .	156
5.2.6	Graphes des variances extrêmes . . . . .	158

5.3	Plans composites centrés	161
5.3.1	Définition	161
5.3.2	Propriétés	162
5.3.3	Intérêt des réplifications centrales	166
5.3.4	Plans composites centrés de petite taille	168
5.3.5	Taille des plans composites centrés	169
5.4	Plans de Box et Behnken	170
5.4.1	Définition	170
5.4.2	Propriétés	172
5.5	Plans simplexes augmentés	173
5.5.1	Définition	173
5.5.2	Propriétés	175
5.6	Plans hybrides	176
5.6.1	Définition	176
5.6.2	Propriétés	178
5.7	Exemple d'application	180
5.8	Résumé	188
5.9	(Compléments) Résultats théoriques	193
5.9.1	Quelques résultats de calcul matriciel	193
5.10	(Compléments) Démonstrations	194
<b>6</b>	<b>Plans d'expérience en blocs</b>	<b>203</b>
6.1	Introduction	203
6.2	Généralités	204
6.2.1	Modèle utilisé	204
6.2.2	Plans d'expérience usuels	206
6.2.3	Inversion de la matrice des moments généralisée	208
6.2.4	Estimations et prédictions	208
6.2.5	Comparaison des effets de blocs	211
6.3	Plans bloqués orthogonalement	212
6.3.1	Définition	212
6.3.2	Reconstruction de l'information	213
6.3.3	Isovariance par transformations orthogonales	214
6.3.4	Une méthode universelle de blocage orthogonal	216
6.4	Exemples de constructions	217
6.4.1	Plans composites centrés	217
6.4.2	Plans de Box et Benkhen	221
6.4.3	Plans hybrides	223
6.5	Exemple d'application	224
6.6	Résumé	232
6.7	(Compléments) Démonstrations	239



<b>7</b>	<b>Plans d'expérience pour mélanges</b>	249
7.1	Introduction	249
7.2	Généralités	250
7.2.1	Hypothèses fondamentales	250
7.2.2	Représentation graphique d'un mélange	250
7.2.3	Notation standard des réponses	253
7.3	Modèles pour mélanges	254
7.3.1	Modèle d'ordre un	254
7.3.2	Modèle d'ordre deux	255
7.3.3	Modèle d'ordre trois complet	257
7.3.4	Modèle synergique d'ordre trois	258
7.3.5	Modèle synergique d'ordre quelconque	260
7.3.6	Résumé	261
7.3.7	Analyse de la variance	262
7.4	Réseaux de Scheffé	263
7.4.1	Définition	263
7.4.2	Ajustement de divers modèles	264
7.5	Réseaux de Scheffé centrés	267
7.5.1	Définition	267
7.5.2	Ajustement d'un modèle synergique	269
7.6	Autres plans pour mélanges	270
7.6.1	Réseaux de Scheffé déséquilibrés	270
7.6.2	Autres types de plans d'expérience	271
7.7	Introduction d'effets de blocs	272
7.7.1	Modèle à effets de blocs	272
7.7.2	Singularité liée au modèle	273
7.7.3	Plans bloqués orthogonalement	274
7.7.4	Estimation des effets de blocs	275
7.8	Exemple d'application	276
7.9	Résumé	284
7.10	(Compléments) Résultats théoriques	287
7.10.1	Ajustement d'un modèle synergique	287
7.11	(Compléments) Démonstrations	289

---

### Partie III Plans d'expérience pour facteurs qualitatifs

---

<b>8</b>	<b>Plans d'expérience pour facteurs qualitatifs</b>	303
8.1	Introduction	303
8.2	Généralités	304
8.2.1	Codage des facteurs qualitatifs	304
8.2.2	Notation standard des réponses	305
8.2.3	Matrice d'incidence	306
8.2.4	Modèle additif	308
8.2.5	Contraintes d'identification	309

8.2.6	Application au modèle additif	310
8.2.7	Plan d'expérience orthogonal	311
8.2.8	Propriétés des plans orthogonaux	312
8.2.9	Analyse de la variance	313
8.3	Plans factoriels complets	314
8.3.1	Définition	314
8.3.2	Propriétés	315
8.4	Fractions régulières de plans factoriels	316
8.4.1	Cas particulier des facteurs à deux modalités	317
8.4.2	Cas général	319
8.4.3	Générateurs d'une fraction régulière	321
8.4.4	Fractions régulières de résolution III	323
8.5	Autres types de plans fractionnaires	324
8.5.1	Existence de plans orthogonaux de petite taille	324
8.5.2	Fractions pour nombre de modalités non premier	326
8.5.3	Fractions asymétriques	328
8.6	Plans en carrés latins	330
8.6.1	Utilisation de carrés latins	330
8.6.2	Utilisation de carrés gréco-latins	332
8.6.3	Utilisation de carrés hyper-gréco-latins	335
8.7	Autres types de plans d'expérience	336
8.7.1	Tables de Taguchi	336
8.7.2	Transformations conservant l'orthogonalité	337
8.7.3	Plans produit	339
8.7.4	Tableaux orthogonaux	340
8.7.5	Plans obtenus numériquement	341
8.8	Introduction d'effets d'interaction	342
8.9	Exemple d'application	345
8.10	Résumé	351
8.11	(Compléments) Démonstrations	355
<b>9</b>	<b>Plans d'expérience en blocs pour facteurs qualitatifs</b>	<b>363</b>
9.1	Introduction	363
9.2	Généralités	364
9.2.1	Modèle pour plans en blocs	364
9.2.2	Matrices et valeurs remarquables	365
9.2.3	Contraintes d'identification	367
9.2.4	Equations normales	367
9.3	Plans en blocs complets	371
9.3.1	Définition et propriétés	371
9.3.2	Estimation des divers effets	372
9.4	Plans en blocs incomplets équilibrés	374
9.4.1	Définition et propriétés	374
9.4.2	Estimation des divers effets	376
9.4.3	Construction des BIBD	378

9.5	Plans en blocs partiellement équilibrés .....	380
9.5.1	Définition et propriétés .....	380
9.5.2	Estimation des divers effets .....	382
9.5.3	Construction des GDD .....	385
9.5.4	Généralisations .....	386
9.6	Plans cycliques .....	388
9.6.1	Définition .....	388
9.6.2	Propriétés .....	389
9.7	Exemple d'application .....	390
9.8	Résumé .....	394
9.9	(Compléments) Résultats théoriques .....	399
9.9.1	Analyse d'un plan cyclique .....	399
9.10	(Compléments) Démonstrations .....	402

---

## Partie IV Optimalité des plans d'expérience

---

<b>10</b>	<b>Critères d'optimalité .....</b>	<b>417</b>
10.1	Introduction .....	417
10.2	Rappels et compléments .....	418
10.2.1	Ensembles ordonnés .....	418
10.2.2	Ordres sur les vecteurs .....	418
10.2.3	Matrice d'information .....	421
10.2.4	Complément d'analyse spectrale .....	426
10.3	Optimalité uniforme .....	427
10.3.1	Exemple introductif .....	427
10.3.2	Extension au cas vectoriel .....	428
10.3.3	Propriétés .....	429
10.3.4	Généralisation .....	431
10.4	Critères d'efficacité .....	433
10.4.1	Généralités et hypothèses .....	433
10.4.2	Le critère de A-efficacité .....	434
10.4.3	Le critère de D-efficacité .....	435
10.4.4	Le critère de E-efficacité .....	436
10.4.5	Le critère général de $\Phi_q$ -efficacité .....	437
10.4.6	Propriétés .....	438
10.4.7	Caractérisation des plans d'expérience $\Phi_q$ -optimaux .....	440
10.4.8	Plans $\Phi_q$ -optimaux obtenus numériquement .....	443
10.5	Optimalité universelle .....	445
10.5.1	Définition .....	445
10.5.2	Propriétés .....	447
10.6	Exemples d'applications .....	448
10.6.1	Plans optimaux pour modèles d'ordre un .....	449
10.6.2	Plans optimaux pour modèles avec interactions .....	450
10.6.3	Plans optimaux pour surfaces de réponse .....	451

10.6.4	Plans optimaux pour modèles à effets de blocs . . . . .	456
10.6.5	Plans optimaux pour modèles à facteurs qualitatifs . . . . .	457
10.7	Résumé . . . . .	460
10.8	(Compléments) Démonstrations . . . . .	465

---

## Partie V Annexes

---

<b>A</b>	<b>Plans factoriels et représentation linéaire des groupes . . . . .</b>	<b>485</b>
A.1	Représentation linéaire des groupes finis . . . . .	485
A.2	Application aux plans à deux niveaux . . . . .	488
A.2.1	Cas des plans factoriels complets . . . . .	488
A.2.2	Cas des fractions régulières . . . . .	492
A.3	Généralisation . . . . .	495
A.3.1	Cas des plans factoriels complets . . . . .	496
A.3.2	Cas des fractions régulières . . . . .	500
<b>B</b>	<b>Plans d'expérience classiques . . . . .</b>	<b>507</b>
B.1	Plans factoriels complets . . . . .	507
B.2	Fractions régulières de plans complets . . . . .	508
B.3	Plans simplexes . . . . .	508
B.4	Plans de Plackett et Burman . . . . .	509
B.5	Plans composites centrés . . . . .	509
B.6	Plans de Box et Behnken . . . . .	510
B.7	Plans simplexes augmentés . . . . .	510
B.8	Plans hybrides . . . . .	511
B.9	Réseaux de Scheffé . . . . .	512
B.10	Réseaux de Scheffé centrés . . . . .	512
B.11	Plans factoriels complets pour facteurs qualitatifs . . . . .	513
B.12	Fractions régulières de plans complets pour facteurs qualitatifs . . . . .	513
B.13	Plans en carrés latins . . . . .	514
B.14	Tables de Taguchi . . . . .	515
B.15	Plans en blocs complets . . . . .	516
B.16	Plans en blocs incomplets équilibrés . . . . .	516
B.17	Plans en blocs partiellement équilibrés . . . . .	516
<b>C</b>	<b>Notations utilisées . . . . .</b>	<b>519</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>523</b>
	<b>Index . . . . .</b>	<b>531</b>

---

## Préface

Les plans d'expérience sont de plus en plus utilisés dans l'industrie et dans les laboratoires de recherche. Ils permettent en effet de modéliser au mieux un phénomène aléatoire, le plus souvent complexe, à l'aide d'un minimum d'essais. Ils s'incrivent donc dans la démarche constante d'amélioration de la qualité ou de la productivité.

Cet ouvrage a pour but de présenter les bases théoriques de la méthode des plans d'expérience. Il se positionne entre les ouvrages pratiques pour ingénieurs (très riches en exemples mais masquant le plus souvent la théorie) et les ouvrages pour mathématiciens (de lecture parfois trop ardue pour les non-spécialistes). Il est structuré autour d'une vision globale des techniques de planification en abordant les grands thèmes suivants :

- plans d'expérience pour facteurs quantitatifs,
- plans d'expérience pour facteurs qualitatifs,
- plans d'expérience en blocs,
- plans d'expérience pour mélanges,
- plans d'expérience optimaux.

Ces diverses techniques sont illustrées à l'aide d'une multitude d'exemples pratiques. La plupart des résultats mathématiques sont aussi démontrés dans des annexes, ceci permet au lecteur d'avoir divers niveaux de lecture de l'ouvrage.

Il s'adresse à un public varié : étudiants de second cycle universitaire ou d'école d'ingénieurs, chercheurs souhaitant approfondir certaines connaissances théoriques sur les plans d'expérience, ingénieurs voulant mieux maîtriser et comprendre les fondements de la planification des expériences ou encore étudiants de cycles techniques scientifiques de type BTS, IUT ou licences professionnelles (en omettant dans ce cas les annexes théoriques).

Ce livre a été initialement développé sur la base de notes de cours rédigées pour un enseignement en Master 2ème année MSID (Méthodes Stochastiques

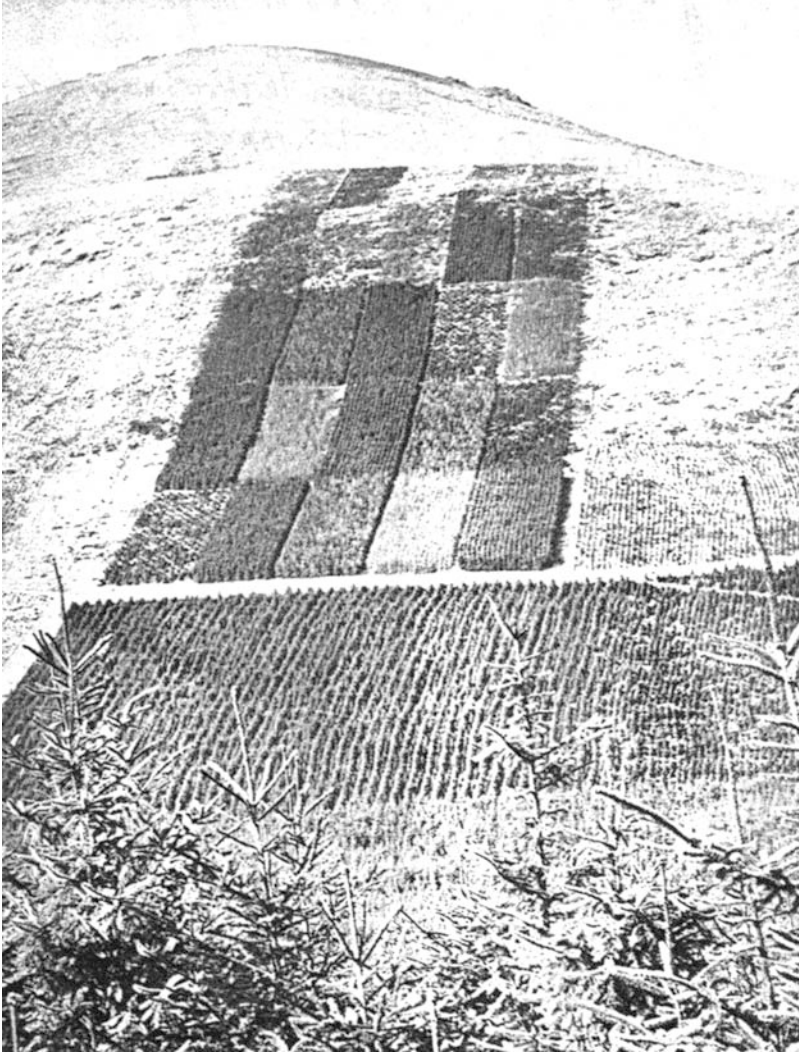
et Informatiques pour la Décision) de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour ainsi que pour un enseignement à l'école ingénieurs ENSGTI basée aussi à Pau.

Je tiens enfin à remercier tout particulièrement mes collègues Bénédicte Puig, Astrid Jourdan et Christian Paroissin pour leur lecture minutieuse des premières versions du manuscrit.

Que soit aussi remerciée mon épouse, Natacha, pour ses encouragements et sa patience.

PAU, Octobre 2009

*Walter TINSSON*



Exemple de culture de diverses essences d'arbres en milieu montagnard selon un carré latin  $5 \times 5$  (Beddgelert Forest en 1929).

*Source :*

*J.F. Box, R.A. Fisher: The Life of a Scientist, New York: Wiley 1978.*