

# Finite-Elemente-Methode

Peter Steinke

# Finite-Elemente-Methode

Rechnergestützte Einführung

3., neu bearbeitete Auflage



Springer

Professor Dr.-Ing. Peter Steinke  
Fachhochschule Münster  
Fachbereich Maschinenbau  
Stegerwaldstraße 39  
48565 Steinfurt  
steinke@fh-muenster.de

Die dritte Auflage ist um neue und überarbeitete Kapitel, eine Vielzahl weiterer Beispiele sowie eine neu gestaltete Lernsoftware CALL\_for\_FEM erweitert. Über die Internetadresse:  
**<http://extras.springer.com/2010/978-3-642-11204-1>**  
kann dieses Softwarepaket heruntergeladen werden.

ISBN 978-3-642-11204-1 e-ISBN 978-3-642-11205-8  
DOI 10.1007/978-3-642-11205-8  
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004, 2007, 2010

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

*Einbandentwurf:* eStudio Calamar S.L., Figueres/Berlin

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media ([www.springer.com](http://www.springer.com))

## Vorwort zur dritten Auflage

Die dritte Auflage enthält zahlreiche Neuigkeiten und Verbesserungen. Neu ist z.B. das Kapitel zur Analogie zwischen Wärmeübertragung und Schichtenströmung. Überarbeitet wurde unter anderem das Kapitel zum Timoshenko-Balken. Zum besseren Verständnis des Buchinhaltes sind weitere Übungsbeispiele eingefügt worden. Deren Lösungen sind unter der neuen Benutzeroberfläche “CALL\_for\_FEM“ (kurz: “CfF“) zu finden. “CfF“ kann aus dem Internet heruntergeladen werden (s. Kap 12.1.1 auf der S. 356). Die Benutzeroberfläche von “CfF“ ermöglicht den Zugriff auf alle weiteren Ressourcen des Buches. Dies sind die Lösungen zu den Übungsbeispielen, Beispiele zur FEM, symbolische und numerische FE-Programme, ein erweiterter und verbesserter Preprozessor “FEM\_GEN“ auf symbolischer Basis, ein neuer Postprozessor “FEM\_VIEW“, die Methode von Ritz, Lernsoftware zum Verständnis und zur Vertiefung des Buchinhaltes und erklärende Video-Tutorials. Zudem kann neuerdings die FE-Rechnung mit Symbolen von “FEM\_CAS“ auf dem “CALL\_for\_FEM-Server“ durchgeführt werden. Zu den Anwendungen steht jeweils eine Hilfe zur Verfügung.

Bei der Erstellung der dritten Auflage waren folgende Personen unterstützend tätig: Herr Dipl.-Ing. Averkamp sowie Dipl.-Ing. Adämmer, Dipl.-Ing. Haselmann und als cand.-ing.'s: Ewering, Gehring, Hemker, Huning und Sebald. Dank gilt auch dem Springer-Verlag, insbesondere Frau Hestermann-Beyerle.

Steinfurt, im Februar 2010

*Peter Steinke*

## Hinweise zum Gebrauch dieses Buches

Viele Erweiterungen, Ergänzungen und weiterführende Hilfsmittel des Buches sind ausgelagert und über das Internet für den Käufer des Buches herunterladbar (s. Kap. 12.1.1 auf der S. 356). Die Hinweise auf diese zusätzlichen Lernmittel werden über drei verschiedene Icons gesteuert, die am Außenrand des Buches auftreten:

Nebenstehendes Icon tritt bei der Formulierung von Übungsbeispielen im Buch auf, deren Lösungen unter dieser Iconform in “CALL\_for\_FEM“ zu finden sind (s. Kap. 12.1.3 auf der S. 356).

Dieses Icon zeigt an, daß zur Erläuterung und Ergänzung des Buchinhaltes ein Video-Tutorial zur Verfügung steht (s. Kap. 12.1.5 auf der S. 358).

Rechtes Icon gibt einen Hinweis auf die Lernsoftware, die den Buchinhalt unterstützt, erweitert und vertieft (s. Kap. 12.1.4 auf der S. 357).



## Vorwort zur ersten Auflage

Das vorliegende Buch samt der beigelegten CD-ROM ist aus Vorlesungen, Übungen und Praktika hervorgegangen, die der Autor an verschiedenen Hochschulen für Maschinenbauer und Maschinenbauinformatiker gehalten hat. Es wendet sich darüber hinaus an Studenten der Natur- und Ingenieurwissenschaften. Weiterhin ist es für Physiker und Ingenieure geeignet, die sich im Selbststudium in die Methode einarbeiten wollen oder an Weiterbildungsveranstaltungen teilnehmen.

In einem Anfangskapitel werden die mathematischen Hilfsmittel wiederholt, die für die weitere Behandlung des Stoffes notwendig sind. Daran schließt sich die Beschreibung elastostatischer Probleme an. Zum Einstieg in die FEM wird das Verfahren von Ritz behandelt. Das Verfahren wird so beschrieben, daß es einer Programmierung mit einem Computeralgebra-System (CAS) zugänglich ist. Diese Vorgehensweise wird auch bei der Herleitung des weiteren Stoffes beibehalten. Neben der Elastostatik wird das Gebiet der Feldprobleme behandelt. Daran schließt sich die Betrachtung nichtlinearer Probleme für Stab und Balken an. Abschließend wird auf die entwickelten Computeralgebraprogramme eingegangen.

Die beigelegte CD-ROM stellt eine wesentliche Ergänzung des Buches dar. Sie enthält neben der Software, die aus insgesamt ca. 27000 Zeilen besteht, Handrechenbeispiele zu den einzelnen Kapiteln des Buches. Die Software soll rechnerunterstütztes Lernen ermöglichen. Sie ist in zwei Anwendungsfelder unterteilbar. Zum einen handelt es sich um Computeralgebraprogramme in "MAPLE", die die Ableitungen des Buches zum Inhalt haben. So ist zum Beispiel das eindimensionale Stabelement im Programm so verallgemeinert, daß man damit ein Stabelement mit  $n$  Knoten und verschiedenen Geometrieformen entwickeln kann. Zum anderen enthält die CD-ROM ein FE-Paket. Dieses liegt sowohl als Computeralgebraprogramm als auch in einer Hochsprache vor. Hiermit lassen sich FE-Probleme in symbolischer und numerischer Form lösen. Ergänzt wird das Paket um einen Postprozessor zur grafischen Auswertung der Eingabe- und Ausgabedaten. Das Arbeiten mit der umfangreichen Software wird mit einem separaten Hilfeprogramm unterstützt. Es werden Eingabebeschreibungen, die durch Beispiele ergänzt sind, leicht verständlich. Weitere Beispiele zu den Programmen zeigen die Anwendungsbreite der Programme auf. Die Verknüpfung von Buch und CD-ROM ist durch zahlreiche Verweise und Beispiele gegeben und machen so ein rechnergestütztes Selbststudium möglich.

Die Erstellung des Buches und der CD-ROM wäre in der vorliegenden Form ohne die engagierte Mitarbeit verschiedener Personen nicht möglich gewesen. Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Dipl.-Ing. Averkamp, der

für die Erstellung der CD sowie für die Erstellung der Bilder zuständig war. Weiterhin kümmerte er sich um die Realisierung des Skriptes mit  $\text{\LaTeX}$ . Mein Dank gilt auch Frau cand.-ing. Fresmann und Frau cand.-ing. Kreuch, die einen Großteil des Skriptes mit  $\text{\LaTeX}$  realisierten und die Oberfläche von "MAPLE" mittels maplets programmierten. Dank auch an Frau Dipl.-Ing. Terlinde für die sorgfältige Durchsicht des Skriptes. Danken möchte ich auch dem Springer-Verlag für die gute Zusammenarbeit, speziell Frau Hestermann-Beyerle.

Steinfurt, im Juli 2003

*Peter Steinke*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	
1.1	Vorgehensweise bei der FEM .....	3
1.2	Verschiedene Elementtypen .....	5
1.3	Beispiele zur Finite-Elemente-Methode .....	10
1.3.1	Beispiel zu nichtlinearen Problemen .....	10
1.3.2	Beispiele zur Optimierung .....	11
<b>2</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	
2.1	Schreibweisen .....	19
2.2	Vektoren .....	20
2.2.1	Definition eines $n$ dimensionalen Vektors .....	20
2.2.2	Skalarprodukt .....	20
2.2.3	Kreuzprodukt .....	20
2.2.4	Ableitung von Vektoren .....	21
2.2.5	Der Nabla-Vektor .....	22
2.2.6	Der Gradientenvektor .....	22
2.2.7	Divergenz und Laplace-Operator .....	23
2.3	Matrizen .....	23
2.3.1	Definition einer Matrix .....	23
2.3.2	Rechenregeln .....	24
2.3.3	Transponierte Matrix .....	26
2.3.4	Orthogonale Matrix .....	27
2.4	Die Dyade (Tensor zweiter Stufe) .....	27
2.4.1	Differentialoperator .....	28
2.4.2	Tensor höherer Stufe .....	28
2.5	Felder .....	28
2.5.1	Skalarfelder .....	28
2.5.2	Das Vektorfeld als Gradient des Skalarfeldes .....	29
2.5.3	Das dyadische Feld .....	29
2.6	Lineare Transformation .....	32
2.6.1	Transformation eines Vektors .....	32
2.6.2	Transformation einer Dyade (Tensor zweiter Stufe) .....	34
2.6.3	Beispiele zur Transformation .....	34
2.7	Funktionale .....	36
2.7.1	Diskretisierung des Funktionalis .....	38
2.8	Dreieckskoordinaten .....	39
2.8.1	Ableitungen in Dreieckskoordinaten (Jakobi-Matrix) .....	41
2.8.2	Integration in Dreieckskoordinaten .....	44
2.9	Numerische Integration (Quadratur) .....	45
2.9.1	Numerische Integration für eindimensionale Probleme ...	45

2.9.2	Numerische Integration in Dreieckskoordinaten .....	47
2.10	Lineare Gleichungssysteme bei der FEM .....	48
2.10.1	Definition der Bandbreite .....	49
2.10.2	Rechenzeiten zur Lösung linearer Gleichungssysteme .....	49
2.10.3	Positiv definite Matrix .....	50
2.10.4	Das Verfahren von Cholesky .....	51
2.10.5	Kondition linearer Gleichungssysteme .....	53
2.10.6	Zwangsbedingungen bei linearen Gleichungssystemen .....	56
2.11	Näherungsfehler bei der FEM .....	57
2.12	Das Tonti-Diagramm.....	58
<b>3</b>	<b>Beschreibung elastostatischer Probleme</b>	
3.1	Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie.....	61
3.1.1	Verknüpfung der Verschiebungen mit den Dehnungen ...	61
3.1.2	Das Stoffgesetz.....	62
3.1.3	Gleichgewichtsbedingungen .....	62
3.1.4	Randbedingungen .....	62
3.1.5	Das Tonti-Diagramm des elastostatischen Problems.....	63
3.1.6	Verknüpfung der Grundgleichungen der Elastostatik.....	64
3.2	Das Prinzip virtueller Verrückungen.....	65
3.2.1	Das Prinzip vom Gesamtpotential .....	65
<b>4</b>	<b>Das Verfahren von Ritz</b>	
4.1	Aufprägen der wesentlichen Randbedingungen.....	72
4.1.1	Beispiel zu den wesentlichen Randbedingungen.....	73
4.2	Eindimensionale Stabprobleme .....	75
4.2.1	Diskretisierung der Formänderungsarbeit.....	75
4.2.2	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten.....	76
4.2.3	Beispiel zum eindimensionalen Stab .....	77
4.3	Eindimensionale Balkenprobleme .....	79
4.3.1	Diskretisierung der Formänderungsarbeit.....	79
4.3.2	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten.....	79
4.3.3	Variation des Gesamtpotentials .....	80
4.4	Scheibenproblem .....	84
4.4.1	Verschiebungsansätze .....	85
4.4.2	Wesentliche Randbedingungen .....	85
4.4.3	Dehnungen und Spannungen der Scheibe.....	86
4.4.4	Diskretisierung der Formänderungsarbeit.....	87
4.4.5	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten.....	88
4.4.6	Variation des Gesamtpotentials .....	89
4.4.7	Kragbalken als Scheibenproblem.....	89



<b>5</b>	<b>Stabelemente</b>	
5.1	Das eindimensionale Stabelement .....	95
5.1.1	Problemdefinition .....	95
5.1.2	Das Tonti-Diagramm des Stabes .....	95
5.1.3	Das Funktional des Stabproblems .....	98
5.1.4	Diskretisierung des Funktionals des Stabes .....	98
5.1.5	Variation des Funktionals .....	101
5.1.6	Beispiel zum eindimensionalen Stab.....	103
5.1.7	Direkte Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix .....	109
5.1.8	Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix (allgemein) .....	111
5.1.9	Übungsbeispiele zum eindimensionalen Stab .....	113
5.1.10	Variable Querschnittsfläche des Stabelementes .....	115
5.1.11	Eindimensionales Stabelement mit $n$ Knoten .....	116
5.1.12	Eindimensionaler Stab mit drei bzw. vier Knoten .....	119
5.2	Das zwei- und dreidimensionale Stabelement .....	120
5.2.1	Das zweidimensionale Stabelement .....	120
5.2.2	Beispiel zum zweidimensionalen Stabproblem .....	123
5.2.3	Optimierung eines Stabtragwerkes.....	128
5.2.4	Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Stab.....	131
5.2.5	Das dreidimensionale Stabelement .....	134
<b>6</b>	<b>Balkenelemente</b>	
6.1	Das eindimensionale Balkenelement.....	139
6.1.1	Problemdefinition .....	139
6.1.2	Dehnungen und Spannungen im Balken .....	140
6.1.3	Das Tonti-Diagramm des Bernoulli-Balkens .....	141
6.1.4	Funktional des Balkenproblems .....	142
6.1.5	Formfunktionen des eindimensionalen Balkens .....	143
6.1.6	Diskretisierung des Funktionals .....	145
6.1.7	Variation des diskretisierten Funktionals .....	147
6.1.8	Bilden der Steifigkeitsmatrix .....	148
6.1.9	Diskretisierung der Streckenlast.....	149
6.1.10	Schnittgrößen des Balkenelementes .....	151
6.2	Beispiel zum eindimensionalen Balken .....	153
6.2.1	Zweiseitig gelagerter Balken mit Streckenlast.....	153
6.2.2	Konvergenztest beim zweiknotigen Balkenelement.....	157
6.2.3	Realisierung des Gelenkes über eine Zwangsbedingung...	159
6.3	Übungsbeispiele zum Bernoulli-Balken.....	161
6.4	Balkenelement mit $n$ Knoten und $p$ Freiheitsgraden pro Knoten .....	164
6.4.1	Das eindimensionale Balkenelement mit drei Knoten .....	167

6.5	Das eindimensionale Balkenelement mit drei Freiheitsgraden pro Knoten .....	171
6.5.1	Balken mit unstetiger Krümmungsverteilung .....	174
6.6	Der Timoshenko-Balken .....	175
6.6.1	Schnittgrößen beim Timoshenko-Balken .....	181
6.6.2	„Locking-Effect“ .....	182
6.6.3	Übungsbeispiele zum Timoshenko-Balken .....	184
6.7	Der elastisch gelagerte Balken .....	185
6.7.1	Beispiel zum elastisch gelagerten Balken .....	187
6.8	Zweidimensionales Balkenelement .....	192
6.8.1	Freiheitsgrade des zweidimensionalen Balkens .....	192
6.8.2	Überlagerung der Dehnungen von Stab und Balken .....	192
6.8.3	Steifigkeitsmatrix .....	193
6.8.4	Transformation der Steifigkeitsmatrix .....	195
6.9	Beispiel und Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Balken .....	198
6.9.1	Winkelproblem .....	198
6.9.2	Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Balken .....	204
<b>7</b>	<b>Scheibenproblem</b>	
7.1	Problemdefinition .....	209
7.2	Die Grundgleichungen des Scheibenproblems .....	210
7.2.1	Die Feldgleichungen der Scheibe .....	211
7.3	Das Funktional des Scheibenproblems .....	212
7.4	Diskretisierung des Funktionals .....	213
7.4.1	Formfunktionen des Dreieckselementes .....	213
7.4.2	Variation des diskretisierten Funktionals .....	217
7.4.3	Diskretisierung der Volumenkräfte .....	219
7.4.4	Diskretisierung der Streckenlasten .....	222
7.4.5	Spannungen in der Scheibe .....	225
7.5	Beispiele zum Scheibenproblem .....	225
7.6	Übungsbeispiele zur Scheibe .....	232
<b>8</b>	<b>Platten- und Schalenelemente</b>	
8.1	Problemdefinition .....	237
8.2	Grundbeziehungen der Platte .....	237
8.2.1	Voraussetzungen bei der Kirchhoff-Platte .....	237
8.2.2	Kinematische Größen der Platte .....	239
8.2.3	Krümmungs-Momenten-Beziehung (Stoffgleichung) .....	240
8.2.4	Gleichgewichtsbeziehungen der Platte .....	242
8.2.5	Randbedingungen der Platte .....	242
8.3	Das Funktional der Platte .....	243

8.4	Anforderungen an das Plattenelement .....	245
8.4.1	Kompatibilität (konforme Elemente) .....	245
8.4.2	Starrkörperbewegung .....	246
8.4.3	Konstanter Dehnungszustand (Verzerrungszustand) .....	247
8.4.4	Einige Dreiecksplattenelemente .....	247
8.5	Diskretisierung des Funktional's .....	249
8.5.1	Ansatzfunktion für die Durchbiegung .....	249
8.5.2	Interpolationsbedingungen .....	250
8.5.3	Formfunktionen .....	253
8.5.4	Krümmungs-Verschiebungs-Beziehung .....	253
8.5.5	Steifigkeitsmatrix .....	254
8.5.6	Flächenlast .....	255
8.5.7	Streckenlast entlang einer Elementkante .....	256
8.6	Konvergenztest des Plattenelementes .....	257
8.7	Schalenelement .....	258
<b>9</b>	<b>Feldprobleme</b>	
9.1	Wärmeübertragung .....	269
9.1.1	Die Poisson'sche Gleichung .....	269
9.1.2	Randbedingungen .....	269
9.1.3	Das Funktional der Wärmeübertragung .....	270
9.2	Eindimensionale Wärmeübertragung .....	271
9.2.1	Problemdefinition .....	271
9.2.2	Funktional des eindimensionalen Wärmeübertragungsproblems .....	271
9.2.3	Diskretisierung des Funktional's .....	272
9.2.4	Variation des Funktional's .....	276
9.2.5	Beispiel zur eindimensionalen Wärmeübertragung .....	277
9.2.6	Übungsbeispiele: Eindimensionale Wärmeübertragung ...	282
9.3	Zweidimensionale Wärmeübertragung .....	284
9.3.1	Problemdefinition .....	284
9.3.2	Randbedingungen bei der zweidimensionalen Wärmeübertragung .....	284
9.3.3	Diskretisierung des Funktional's .....	285
9.3.4	Variation des Funktional's .....	292
9.3.5	Beispiel zur zweidimensionalen Wärmeübertragung .....	294
9.3.6	Übungsbeispiele zur zweidimensionalen Wärmeübertragung	299
9.4	Torsion von prismatischen Körpern .....	302
9.4.1	Funktional des Torsionsproblems .....	305
9.5	Analogie - Wärmeübertragung zu Schichtenströmung ....	308
9.5.1	Problembeschreibung .....	308

9.5.2	Grundgleichungen .....	308
9.5.3	Analogie der Randbedingungen .....	310
9.5.4	Analoges Funktional des Strömungsproblems .....	311
<b>10</b>	<b>Eigenfrequenzen und Schwingungsformen von Stäben und Balken</b>	
10.1	Der eindimensionale Stab .....	315
10.1.1	Massenmatrix des eindimensionalen Stabes.....	316
10.1.2	Eigenfrequenzen und Schwingungsformen.....	316
10.2	Beispiele zum eindimensionalen Stab .....	318
10.2.1	Einmassenschwinger .....	318
10.2.2	Zweimassenschwinger .....	319
10.3	Der eindimensionale Balken.....	322
10.3.1	Massenmatrix des eindimensionalen Balkens .....	322
10.4	Beispiele zum eindimensionalen Balken.....	323
10.4.1	Beidseitig gelenkig gelagerte Balken .....	324
10.4.2	Kragbalken .....	326
10.4.3	Übungsbeispiel zur Balkenschwingung .....	328
<b>11</b>	<b>Nichtlineare Probleme</b>	
11.1	Große Verformungen .....	333
11.1.1	Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung .....	333
11.1.2	Dehnungen für Stab und Balken.....	334
11.1.3	Stab mit großen Verformungen .....	334
11.1.4	Balken mit großen Verformungen.....	337
11.2	Knicken von Stäben und Balken .....	341
11.2.1	Beispiel zum Stabknicken .....	343
11.2.2	Knickbeispiel I (Stab).....	346
11.2.3	Beispiel zum Knicken von Balken.....	346
11.2.4	Die vier Eulerfälle .....	349
11.2.5	Knickbeispiel II (Balken) .....	350
11.2.6	Knickbeispiel III (Dreiknotiges Balkenelement) .....	350
<b>12</b>	<b>CALL_for_FEM</b>	
12.1	Übersicht über CALL_for_FEM .....	355
12.1.1	Installation von CALL_for_FEM auf dem Rechner .....	356
12.1.2	Updates zu CALL_for_FEM .....	356
12.1.3	Lösungen zu den Übungsbeispielen .....	356
12.1.4	Hinweise auf die Lernsoftware durch Icons.....	357
12.1.5	Video-Tutorials als Lernmittel .....	358
12.1.6	FE-Programme ohne MAPLE nutzbar .....	358
12.1.7	FEM_CAS über den CALL_for_FEM-Server nutzbar.....	360

12.1.8	Weitere Lernsoftware zur Unterstützung des Buches .....	361
12.2	Weitere Programmbeschreibungen .....	363
12.2.1	Das Programm InterFEM .....	363
12.2.2	Das Verfahren von Ritz für den eindimensionalen Stab (Ritz_Stab) .....	363
12.2.3	Das Verfahren von Ritz für den Balken (Ritz_Balken) .....	365
12.2.4	Das Verfahren von Ritz für die Scheibe (Ritz_Scheibe) ..	367
12.2.5	Eindimensionales Stabelement (Stab_1D) .....	369
12.2.6	Eindimensionales Balkenelement (Balken_1D) .....	371
12.2.7	Timoshenko-Balken .....	372
12.2.8	Dreiecksscheibenelement (Scheibe_Dreieck) .....	373
12.2.9	Plattenelement (Platte) .....	374
12.2.10	Knicken eines eindimensionalen Balkens (Knicken_Balken)	374
12.2.11	Eigenfrequenzen und Schwingungsform des Balkens (Dy- namik_Balken) .....	376
12.2.12	Eindimensionale Feldprobleme (Feldprobleme_1D) .....	377
12.2.13	Zweidimensionale Feldprobleme (Feldprobleme_2D) .....	377
<b>13</b>	<b>Beispiele zu den Programmen</b>	
13.1	Rahmen durch Federn gestützt .....	381
13.2	Scheibe gestützt durch eine Feder .....	382
13.3	Wärmeübertragung (Torsion) eines gleichseitigen Drei- ecks (Quadrates) .....	384
	<b>Verwendete Formelzeichen und Symbole</b> .....	389
	<b>Literatur</b> .....	399
	<b>Sachverzeichnis</b> .....	403
	<b>Programme</b> .....	411