

Springer-Lehrbuch

Peter Boon · Iris van Gulik-Gulikers · Martin Kindt ·
Wim Kleijne · Ton Konings · Hans Melissen ·
Rob van Oord · Ferdinand Verhulst · Agnes Verweij

Herausgeber:

Ferdinand Verhulst · Sebastian Walcher

Das Zebra-Buch zur Geometrie

Übersetzt von

Mieke Kuschnerus und Sebastian Walcher

Geleitwort von Jan van Maanen

 Springer

Prof. Ferdinand Verhulst
Mathematisch Instituut
University of Utrecht
PO Box 80.010
3508TA Utrecht
The Netherlands
f.verhulst@uu.nl

Prof. Dr. Sebastian Walcher
Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH Aachen
52056 Aachen
walcher@mathA.rwth-aachen.de

ISSN 0937-7433

ISBN 978-3-642-05247-7

e-ISBN 978-3-642-05248-4

DOI 10.1007/978-3-642-05248-4

Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2010): 51-01, 52-01, 00-01

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandentwurf: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort

Warum Zebra? Wie zu erwarten, handelt es sich um kein Tier. Hinter dem Titel steckt folgende Geschichte: Gegen Ende der 1990er Jahre wurde im mathematisch-naturwissenschaftlichen Curriculum für Sekundarstufen in den Niederlanden Platz geschaffen für eigenständige Projektarbeit. Dies geschah auf dringenden Wunsch der Universitäten, die auf Studienanfänger mit Erfahrung in selbstständiger Arbeit Wert legten. Also wurden für die Oberstufen u. a. in Mathematik zwei Projekte im Curriculum vorgesehen, mit einem Arbeitsaufwand von je etwa 20 Stunden. Es fehlte dann nur noch Material für die Projekte. In den offiziellen Veröffentlichungen des Ministeriums wurde dieses Detailproblem gelöst, indem für die Projektinhalte als Platzhalter ein Kasten mit diagonaler Schraffierung plazierte wurde. Diese Kästen (welche an die Streifen eines Zebras erinnern) wurden im Niederländischen als „zebra blokken“ bezeichnet. Dies war der Anlass für die Zebra-Reihe (zebra reeks) von Epsilon Uitgaven (Utrecht), die in kleinen Bänden (je etwa 60 Seiten) Material für mathematische Projekte präsentiert.

Die Zebra-Reihe entstand auf Initiative der damaligen Vorsitzenden der Niederländischen Mathematiklehrer-Vereinigung (NVvW) und des Chefredakteurs von Epsilon Uitgaven. Die Reihe ist in den Niederlanden sehr erfolgreich. Inzwischen sind an die 30 Bände erschienen, viele von diesen haben mehrere Auflagen erreicht. Eine Übersicht ist auf folgender Webseite zu finden: www.epsilon-uitgaven.nl

Die Autoren sind Lehrer und Hochschullehrer für Mathematik ebenso wie für Mathematik-Didaktik; so ergab sich eine neue Kooperation zwischen Schul- und Universitätsbereich, mit Beteiligung von Schulpraktikern ebenso wie von Forschern. Die Bände bieten die Gelegenheit zur eigenständigen Beschäftigung mit anregender, gehaltvoller Mathematik, wobei in der Regel keine vertieften Mathematik-Kenntnisse vorausgesetzt werden. Sie sind nicht nur für Schülerinnen und Schüler, sondern auch für interessierte Laien zugänglich. Der Fokus

liegt auf dem Erforschen und Entdecken eines mathematischen Themas; dabei steht ein breites Themenspektrum zur Auswahl.

Sechs dieser Zebra-Bände werden im vorliegenden Buch zusammengefasst und auf Deutsch veröffentlicht. Die Herausgeber haben als übergreifendes Thema die Geometrie gewählt. Der wesentliche Grund für diese Auswahl ist die Vielseitigkeit der Geometrie. Geometrie ist ein klassisches (Jahrtausende altes) und zugleich modernes Gebiet; neue geometrische Fragestellungen und Antworten auf lange ungelöste geometrische Probleme sind nach wie vor Gegenstand der mathematischen Forschung. Geometrie ist aus Anwendungen entstanden, anwendungsrelevant (in Kunst und Wissenschaft gleichermaßen) und zugleich ein wesentlicher Motor für das Fortschreiten mathematischer Erkenntnis. Geometrie hat zahlreiche Querverbindungen zu anderen mathematischen Disziplinen. All diese Aussagen werden für Leserinnen und Leser dieses Buches erfahrbar und begreifbar.

Wer kann dieses Buch mit Gewinn lesen? Genau wie in Holland sind Schülerinnen und Schüler eine Zielgruppe, vor allem in Hinblick auf die vorgesehene Einführung von Projektunterricht auch an den Schulen deutscher Bundesländer. Ebenso ist das Buch für Personen geeignet, die mit relativ geringen Vorkenntnissen (etwa Sekundarstufe I) mehr über Mathematik erfahren wollen. Darüber hinaus sind die Themen auch für Lehrerinnen und Lehrer sowie für Studierende des Lehramts interessant: Praktiker finden zahlreiche Anregungen und Projektvorschläge, und Studierenden eröffnet sich ein schneller Zugang zu Themen, welche in der fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Ausbildung relevant sind.

Die Grundversion der Übersetzung ins Deutsche wurde in sehr umsichtiger Weise von Mieke Kuschnerus, Studentin der Mathematik an der RWTH Aachen, angefertigt. Der zweitgenannte Herausgeber überarbeitete diese Version vor allem im Hinblick auf mathematische Fachtermini. (Für mathematische Fehler, die vielleicht bei der Übersetzung entstanden, ist also er verantwortlich. Für eventuelle mathematische Fehler in den Originaltexten, die bei der Übersetzung unentdeckt blieben, sind Autoren und Übersetzer gemeinsam verantwortlich.) Den einzelnen Kapiteln wurde eine kurze Einleitung der Herausgeber vorangestellt; die ursprünglichen Einleitungen mit ihrem Bezug auf die holländischen Lehrpläne blieben daneben erhalten. Da sich die Zebra-Bände an Schüler richten, haben wir die Anrede „Du“ aus den Originaltexten beibehalten.

Für ihre Hilfe bei der Fertigstellung der Druckvorlage sind wir einigen Personen zu Dank verpflichtet. Herr Bernd Bollwerk, MTA am Lehrstuhl A für Mathematik der RWTH, hat einen großen Teil der Grafik- und Bilddateien in präsentable Form gebracht und einige verlorene Bilder rekonstruiert. Herr Felix Voigtlaender, Student der Mathematik an der RWTH, hat eine Reihe von Grafiken neu erstellt. Schließlich hat Frau Barbara Giese, Sekretärin am Lehr-

stuhl A für Mathematik, die diffizile und wenig dankbare Aufgabe gemeistert, die stilistisch recht unterschiedlichen Vorlagen in ein für die Buchherausgabe passendes Format zu bringen.

Utrecht und Aachen
Dezember 2009

Ferdinand Verhulst
Sebastian Walcher

Geleitwort

Liebe Leserin, lieber Leser,

Im Vorwort wurde schon sehr viel über den Inhalt dieses Buches gesagt. Wiederholung, obwohl ein Grundprinzip des Unterrichtens, führt uns hier nicht weiter. Aber es ist immer gut, sich zu freuen, und gerade weil Mathematiker das oft vergessen, will ich meiner Freude Ausdruck geben. Denn Vieles an und in diesem Buch ist für mich (und hoffentlich auch für Sie) Anlass zur Freude.

Ich freue mich erstens über die Buchkapitel, welche Schönes aus den Niederlanden für Deutschland zugänglich machen, von Nordrhein-Westfalen bis Kiel und Berchtesgaden (und natürlich viele weitere Dörfer, Städte und Bundesländer). Wie auch die Herausgeber in ihrem Vorwort erwähnen, findet man in diesem Buch nicht den Hauptstrom des niederländischen Mathematikunterrichts, aber doch einen für viele Schüler seit 1998 sehr wichtigen Nebenfluss. Mit einem Anteil von etwa zehn Prozent im Curriculum der letzten zwei oder drei Jahre in der Sekundarstufe II sollte jede Schülerin und jeder Schüler ein Wahlfach absolvieren. Dafür standen 40 Stunden zur Verfügung. Die vorliegenden Texte sind für diesen Wahlunterricht geschrieben, oft von Lehrern gemeinsam mit Wissenschaftlern. Man erfährt viel Schönes über die Geometrie, wenn man die Texte durcharbeitet. Das ganze Buch dürfte also ein Vielfaches von 40 Stunden beanspruchen.

Besonders freue ich mich auch, dass zwei von meinen Mathematiker-Kollegen, die einigen Aspekten des niederländischen Mathematikunterrichts kritisch gegenüber stehen und dies auch zum Ausdruck gebracht haben, offensichtlich auch Gutes finden an den Entwicklungen der letzten beiden Jahrzehnte. Denn sonst hätten sie sich nicht die aufwendige Arbeit gemacht, die niederländischen Zebra-Hefte auch für deutsche Leserinnen und Leser zugänglich zu machen. Ich stimme mit den Herausgebern überein: Vieles an diesen Kapiteln für den Projektunterricht ist sehr reizvoll.

Eine spezielle Freude bereitet mir schließlich das Kapitel über nichteuklidische Geometrie, welches aus der Dissertation meiner Doktorandin Iris van Gulik entstanden ist. Es zeigt, wie die Geschichte dabei hilft, die Mathematik verstehen und schätzen zu lernen.

Ich hoffe, dass dieses Buch die mathematisch-nachbarschaftlichen Beziehungen verbessern wird, zwischen den Niederlanden und Deutschland ebenso wie zwischen allen, die gemeinsam die Kapitel durcharbeiten. Und auch wenn Sie allein daran arbeiten, sage ich voraus, dass Sie sich freuen werden.

Warum noch warten? An die Freude!

Jan van Maanen
Professor für Mathematikdidaktik,
Direktor des Freudenthal-Instituts,
Universität Utrecht

Inhaltsverzeichnis

1	Der Goldene Schnitt	1
1.1	Eine göttliche Teilung	2
1.2	Die Mathematik hinter dem Goldenen Schnitt	4
1.2.1	Das Pentagramm	4
1.2.2	Eine mathematische Eigenschaft	5
1.3	Arbeitsaufträge	26
1.3.1	Der Modulor von Le Corbusier	26
1.3.2	Der Goldene Schnitt als Schönheitsideal?	30
1.3.3	Phyllotaxis	33
1.3.4	Nabelschau von Kopf bis Fuß	36
1.3.5	Rätseln mit der Fibonacci-Folge	36
1.3.6	Die Goldene Spirale	38
1.3.7	Optimierung eines chemischen Prozesses	41
1.4	Bildnachweise	43
1.5	Websites und Literatur	43
	Bibliografie	45
1.6	Lösungen	45
2	Vielseitige Kugeln	49
2.1	Viele kleine Flächen bilden eine Kugel	51
2.2	Über regelmäßige Vielecke	53
2.3	Vier, fünf, sechs . . . Flächen	56
2.4	Prismen, Pyramiden, Antiprismen und noch mehr	59
2.5	Die Formel von Euler	61
2.6	Die fünf regulären Polyeder	66
2.7	Halbreguläre Polyeder	69
2.8	Dualität	73
2.9	Geodätische Kuppeln	77
2.10	Fullerene	83
2.11	Übersicht: Geodätische Kuppeln und Fullerene	87

2.12	Abschließender Arbeitsauftrag: Entwirf Deine eigene Kugel . . .	88
2.13	Lösungen zu den Aufgaben	89
2.14	Lösungen zu den Applets	97
3	Perspektive - wie muss man das sehen?	101
3.1	Die Anfangsgründe der Perspektive	102
3.2	Perspektivische Verzerrung	105
3.3	Das Triptychon der Perspektive	111
3.4	Einpunktperspektive	119
3.5	Zweipunktperspektive	126
3.6	Zweipunktperspektive mit geneigter Bildebene	132
3.7	Dreipunktperspektive	135
3.8	Abschließender Arbeitsauftrag	142
3.9	Lösungen zu den Aufgaben	142
3.10	Anhang: Der Satz des Thales	150
	Literaturhinweise	153
4	Schiebereien mit Autos, Münzen und Kugeln	155
4.1	Der optimale Parkplatz	157
4.1.1	Quadratische Parkplätze	158
4.1.2	Eine untere Schranke	162
4.1.3	Eine obere Schranke	165
4.2	Coladosen auf einem Tablett	166
4.2.1	Kreise in der Ebene	167
4.2.2	Dreieckige Tablett: Lösungen suchen	169
4.2.3	Sieben Münzen: Lösungen berechnen	170
4.2.4	Vier Münzen: Ein Beweis	172
4.2.5	Stabile Stapel	175
4.2.6	Das Problem von Malfatti	177
4.3	Gestapelte Kanonenkugeln	179
4.3.1	Die Anzahl von Kugeln in einem Stapel	180
4.3.2	Die Höhe eines Stapels	185
4.3.3	Die Vermutung von Kepler	186
4.4	Anhang 1: Lösungen zu den Aufgaben	190
4.5	Anhang 2: Das gleichseitige Dreieck	194
5	Eine kühle Sicht der Wahrheit	199
5.1	Einleitung	200
5.2	Was ist beweisbar?	202
5.2.1	Rechtsprechung	202
5.2.2	Wirtschaft	203
5.2.3	Physik	203
5.2.4	Beweise in der Mathematik	204
5.3	Beweisbeispiele	206

5.3.1	Begriffe	206
5.3.2	Wie ein Beweis aussieht	209
5.4	Der Stil eines mathematischen Beweises	217
5.4.1	Wie ausführlich muss ein Beweis sein?	217
5.4.2	Bemerkungen zur Logik	219
5.4.3	Widerspruchsbeweis	221
5.4.4	Vollständige Induktion	222
5.4.5	Zurückführen auf eine bekannte wahre Aussage	226
5.4.6	Gibt es ein Rezept für Beweise?	227
5.5	Die Regeln des Spiels	236
5.5.1	Axiomatik	236
5.5.2	Intuitionismus	238
5.5.3	Intermezzo: Der Platonismus	239
5.5.4	Gödels Bombe geht hoch	239
5.5.5	Beweise und Computer	241
5.5.6	Das Spiel mit den Regeln	242
5.6	Hinweise zu den Aufgaben	242
5.7	Websites und Literatur	245
Literaturhinweise		247
6	Nicht-Euklidische Geometrie und ihre Geschichte	249
6.1	<i>Die Elemente</i> von Euklid	250
6.1.1	Axiomatischer Aufbau	251
6.1.2	Das Parallelenpostulat	253
6.1.3	Sätze, die ohne das Parallelenpostulat beweisbar sind ..	255
6.1.4	Sätze, die mit dem Parallelenpostulat bewiesen werden .	258
6.1.5	Die Winkelsumme im Dreieck	259
6.1.6	Weitere Untersuchungen der <i>Elemente</i> von Euklid	262
6.2	„Beweise“ des Parallelenpostulats	262
6.2.1	Wallis	263
6.2.2	Saccheri	266
6.3	Die Begründer der nichteuklidischen Geometrie	270
6.4	Ein Modell der elliptischen Geometrie	276
6.4.1	Gilt das Parallelenpostulat?	277
6.4.2	Die Winkelsumme im Dreieck	277
6.5	Ein Modell der hyperbolischen Geometrie: Poincarés Kreisscheibenmodell	278
6.5.1	Vorbereitungen mit Cabri	279
6.5.2	Das hyperbolische Postulat	283
6.5.3	Die Winkelsumme im Dreieck	284
6.5.4	Nichteuklidische Abstände	284
6.5.5	Parallele Geraden	285
6.5.6	Hyperbolische Kreise	285

6.5.7	Weitere Untersuchungen zur Poincaré-Kreisscheibe und zur hyperbolischen Geometrie	286
6.5.8	Unterschiede zwischen der Euklidischen und der Nicht-Euklidischen Geometrie	286
6.6	Arbeitsaufträge	287
6.6.1	Untersuche die Bedeutung der nichteuklidischen Geometrie in den Werken von Escher	287
6.6.2	Verfasse eine ausführliche Biographie einer Person, die eine wichtige Rolle bei der Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie spielte.	288
6.6.3	Untersuche ein anderes Modell der hyperbolischen Geometrie: Das Beltrami-Klein-Modell	289
6.6.4	Untersuche Gauß' weitere Bedeutung für die Mathematik	290
6.6.5	Untersuche weitere Resultate der hyperbolischen Geometrie im Modell von Poincaré	290
6.6.6	Untersuche den weiteren Inhalt von <i>Die Elemente</i> von Euklid	291
	Literaturhinweise	293
	Autoren und Herausgeber	295
	Namens- und Sachverzeichnis	299