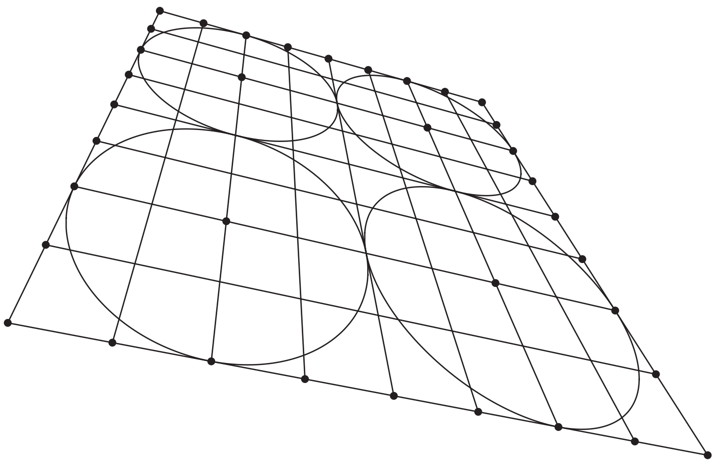
Springer-Lehrbuch

Jürgen Richter-Gebert · Thorsten Orendt

Geometriekalküle



Springer

Jürgen Richter-Gebert
Geometrie und Visualisierung
Zentrum Mathematik
Technische Universität München
Boltzmannstr. 3
85747 Garching
Deutschland
richter@ma.tum.de

Thorsten Orendt
Geometrie und Visualisierung
Zentrum Mathematik
Technische Universität München
Boltzmannstr. 3
85747 Garching
Deutschland
orendt@ma.tum.de

ISSN 0937-7433
ISBN 978-3-642-02529-7 e-ISBN 978-3-642-02530-3
DOI 10.1007/978-3-642-02530-3
Springer Dordrecht Heidelberg London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 51A25, 51A45, 51M05, 65U05

Einbandentwurf: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Printed on acid-free paper

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort

“Mathematik ist die Kunst sich vor’m Rechnen zu drücken”. In gewisser Weise hat diese Schullehrerweisheit ein wenig Pate bei der Erstellung dieses Buches gestanden. In *Geometriekalküle* geht es darum, elementare geometrische Operationen wie *Schnitt zweier Geraden*, *Verbindungsgerade zweier Punkte*, *Kreis durch drei Punkte*, etc. so elegant und einfach wie möglich auszudrücken. “Ausdrücken” heißt hierbei in Formeln zu übersetzen, die entweder von Hand oder auf dem Computer ausgerechnet werden können. Hierzu sind immer zwei Aspekte relevant, die sich gegenseitig bedingen. Einerseits benötigt man eine algebraische Darstellung grundlegender Objekte (Punkte, Gerade, Kreise, Kegelschnitte, etc.), andererseits Berechnungsformeln für die verschiedenen Verknüpfungen. Beide Aspekte gehen Hand in Hand. Nur die passende algebraische Repräsentation der Objekte ermöglicht es die Operationen einfach auszudrücken. Umgekehrt bedingen manchmal strukturelle Aspekte einer geometrischen Operation, dass es sinnvoll ist, die Repräsentation der Objekte anzupassen.

Unser Buch hat sich zum Ziel gesetzt, wichtige algebraische Herangehensweisen im Umgang mit geometrischen Objekten zu erläutern. Letztlich sollen Mittel bereit gestellt werden, mit denen man mit geometrischen Objekten *rechnen* kann. Die einzelnen Rechenoperationen simulieren dabei geometrische Operationen wie z.B. *Schnitt*, *Verbindungsgerade*, *Kreis durch drei Punkte*, etc.. Zielsetzung ist es, ein möglichst stimmiges und einheitliches System zu schaffen, mit dem geometrische Objekte und Operationen in einheitlicher und eleganter Weise dargestellt werden können. In der Tat wird der Leser im Verlauf des Buches nicht nur ein solches System kennen lernen, sondern einige alternative und miteinander verbundenene Ansätze. Die wesentlichen Stationen werden hierbei

- homogene Koordinaten, Fernpunkte und projektive Geometrie,
- Zusammenspiel von komplexen Zahlen und Euklidischer Geometrie,
- Determinantenkalkül, und
- die Lie’sche Kreisgeometrie sein.

Der Schwerpunkt des Buches liegt hierbei im Aufbau des Begriffssystems. Es werden im Vergleich zu manch anderen mathematischen Texten verhältnismäßig wenig *Sätze* aufgestellt und bewiesen. Dies liegt in der Natur der Sache. Zielsetzung ist es gerade ein Begriffssystem aufzubauen, bei dem möglichst viele Zusammenhänge sich direkt aus den Definitionen erschließen. Beweise werden somit oftmals fast zu Trivialitäten, weil diese direkt aus den Definitionen folgen.

Wichtiges Hilfsmittel auf dem Weg wird hierbei die Sprache der *projektiven Geometrie* sein, die konsequent versucht unendlich ferne Objekte mit in die Betrachtung einzubeziehen und somit die übliche euklidische Betrachtungsweise von Sonderfällen befreit. Die algebraische Entsprechung findet die projektive Geometrie in den *homogenen Koordinaten*, die ein ideales Begriffssystem im obigen Sinne darstellen. Die ersten Kapitel (1–5) werden sich genau mit diesen Strukturen beschäftigen. Auf den ersten Blick wird dieser Zugang zur Geometrie einen großen Nachteil haben. Metrische Eigenschaften wie Winkel und Längen erscheinen nur schwer in das System einbeziehbar. Es stellt sich heraus, dass dieser Nachteil nur ein scheinbarer ist. Die konsequente Nutzung von *komplexen Zahlen* erlaubt quasi die projektive Behandlungsweise metrischer Strukturen. Dieser Zugang wird in den Kapiteln 6 und 7 verfolgt. Die Kapitel 8 und 9 bauen Zusammenhänge zur *äußeren Algebra* auf, die es letztlich ermöglichen die dargestellten Herangehensweisen auch auf höhere Dimensionen zu übertragen. Insbesondere ermöglich dies die elegante Behandlung von Punkten, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum. Weiterhin wird gezeigt, dass eine sinnvolle Darstellung von Geraden im Raum durch sechsdimensionale Vektoren gegeben ist. Die Kapitel 10 bis 12 schließlich führen den Gedanken der hochdimensionalen Einbettung geometrischer Objekte konsequent weiter und führen für ebene Kreise fünfdimensionale Koordinaten ein (die *Lie-Koordinaten*), mit denen sich Schnitt- und Berührrelationen ebener Figuren besonders elegant darstellen lassen. In diesem Zusammenhang werden wir auch Bekanntschaft mit *Quaternionen* machen, einer Struktur, durch die sich Drehungen im Raum besonders elegant ausdrücken lassen.

Unsere Behandlung der Themen hat mehrere Leitmotive. Eines ist wie bereits erwähnt das Darstellen niederdimensionaler Objekte in höherdimensionalen Räumen. Durch die zusätzlichen Dimensionen kann man zusätzliche Informationen zu den Objekten codieren. Dies ermöglicht es oftmals Situationen zu linearisieren, die auf den ersten Blick höhere algebraische Operationen zu erfordern scheinen. Ein zweites Leitmotiv ist das Eliminieren von Sonderfällen. Nicht selten scheinen geometrische Operationen nur für bestimmte Eingabegrößen zulässig (zwei Geraden haben nur dann einen Schnitt, wenn sie nicht parallel sind). Oftmals ist es sinnvoller diese Sonderfälle hinzunehmen, als sich in einem Gewirr von Fallunterscheidungen zu verstricken. Diese geschieht, indem man zusätzliche Elemente "hinzudefiniert". Wenn es für zwei Parallelen keinen Schnittpunkt gibt, dann definieren wir einfach seine Existenz und nennen ihn einen *Punkt im Unendlichen*. Das Hinzunehmen solcher zusätzlicher Elemente hat nicht selten überraschende algebraische Entsprechungen und offenbart die eigentliche Natur der Sache. Ganz analog wird beim Hinzunehmen einer Zahl i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ wird plötzlich die Welt der reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen hin erweitert und für viele reelle Effekte der "wahre" Grund geliefert. Dies bringt uns zum dritten Leitmotiv: Die Rolle der komplexen Zahlen in der Geometrie. Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl kann in der komplexen Zahlenebene als Drehstreckung aufgefasst werden. Wir werden sehen, dass dieser Zusammenhang der Schlüssel dazu ist einige Euklidische Verhältnisse algebraisch elegant auszudrücken. Ein Fakt, der im Neuzehnten Jahrhundert zu einiger Überraschung geführt hat, aber auch heute noch nicht so bekannt ist wie er es vielleicht sein sollte.

Alles in allem soll dieses Buch eine Art geometrischer/algebraischer Werkzeugkasten für den Umgang mit geometrischen Problemen darstellen. Insbesondere, wenn man vor der Aufgabe steht gewisse geometrische Primitivoperationen in einem Computerprogramm zu implementieren, sollten sich hier einige nützliche Methoden finden lassen. Aber auch bei der rein mathematischen Betrachtungsweise sollten sich unter Verwendung der vorgestellten Mittel viele Dinge einfacher und schlüssiger formulieren lassen.

Wir haben versucht die Voraussetzungen für das Verständnis des Textes so gering wie möglich zu halten. Der Text richtet sich an Studenten der Mathematik, Informatik und Physik ab dem dritten Semester. Grundkenntnisse in Linearer Algebra (Vektorräume, Matrizen, Kreuzprodukt, Determinanten, Eigenvektoren) und komplexen Zahlen (Definition, komplexe Zahlenebene, Polardarstellung) sollten vorhanden sein. Mathematiker werden im Text elementare Einführungen in Themenbereiche finden, die man üblicherweise erst sehr viel später (oder gar nicht) kennen lernt. Für Informatiker sollten sich viele Anregungen zum Implementieren geometrischer Primitivoperationen finden. Physiker finden hier (wenn auch oftmals nicht explizit hervorgehoben) Grundlagen vieler mathematischer Methoden, die in der theoretischen Physik, der Relativitätstheorie, bis hin zur Quanten- und Elementarteilchenphysik eine entscheidende Rolle spielen.

Der Ursprung und die Motivation für diesen Text entstammt zweier verschiedenen Quellen. Einerseits ist er begleitend zu einer Bachelor Vorlesung "Geometriekalküle" für Mathematikstudenten im dritten Semester an der TU München entstanden, bei der Einer von uns (Jürgen Richter-Gebert) die Vorlesungen gehalten hat, und der Andere (Thorsten Orendt) für die Übung verantwortlich war. Sowohl der Text als auch die Übungen sind also in gewisser Weise praxiserprobt. Die Vorlesung war einsemestrig, zweistündig und beinhaltete grob den Stoffumfang der ersten neun Kapitel. Der Text bietet aber auch genügend Material eine durchaus umfangreichere Vorlesung damit zu gestalten. Jedes Kapitel enthält als letzten Abschnitt eine *Exkursion.* Diese hebt immer schlaglichtartig einen weiterführenden/angewandten/ästhetischen Aspekt des gerade behandelten Stoffes hervor. Die Exkursionen können ohne das Verständnis der nachfolgenden Kapitel zu beeinträchtigen beim Lesen ausgelassen werden. Es sei an dieser Stelle auch erwähnt, dass parallel zur Erstellung dieses Buches ein unfangreicherers englichsprachiges entsteht (vgl. [Ri]), das viele der hier angeschnittenen Themen nochmals vertieft und weiterführend aufgreift und weitere Hintergründe und Querbezüge vermittelt. Dem interessierten Leser wird dies als ergänzende Literatur sehr empfohlen.

Die zweite Quelle ist die Erfahrung bei der Entwicklung des Geometrieprogrammes *Cinderella* (`www.cinderella.de`), welches der zweite Autor (Jürgen Richter-Gebert) gemeinsam mit Ulrich Kortenkamp verfasst hat. Bei der Entwicklung des Programmes haben wir uns bemüht die benötigten geometrischen Operationen in möglichst eleganter Weise zu implementieren. Viele (wenn auch lange nicht alle) der in Cinderella verwendeten Methoden finden in diesem Buch eine Darstellung. Unter Verwendung von Cinderella entstand auch eine Sammlung interaktiver Begleitmaterialen zu diesem Buch, die im Rahmen des Portals Mathe-Vital (`www.mathe-vital.de`) zur Verfügung gestellt werden. Die Materialien illustrieren viele der hier vorgestellten Konzepte und stellen eine nützliche Ergänzung zum Studium dieses Buches dar. Für den Dozenten bieten sie auch eine Fülle von Demonstrationsmaterial. Die Materialien sind direkt erreichbar unter `www.geometriekalkuele.de`.

Wir hoffen der Leser hat beim Durcharbeiten dieses Textes annähernd so viel Freude wie wir beim Erstellen.

An dieser Stelle sei noch unser Dank an einige Personen gerichtet, ohne die dieses Buch insbesondere in so kurzer Zeit nicht entstanden wäre, oder sicherlich eine deutlich andere Form hätte. Ich, Jürgen Richter-Gebert, danke ganz herzlich meiner Frau Ingrid dafür, dass sie mir in den letzen drei Monaten so sehr den “Rücken frei gehalten hat”, so dass ich mich voll auf die Erstellung des Textes und vieler Graphiken und Applets konzentrieren konnte. Ebenso dafür, dass sie immer ein offenes Ohr für die zahlreichen großen und kleinen Probleme im Zusammenhanghang mit diesem Projekt hatte. Meiner Tochter Angie danke ich ganz herzlich für ihr Verständnis, dass ich in den letzen Wochen ziemlich absorbiert und nur begrenzt ansprechbar war. Ich, Thorsten Orendt, danke insbesondere meiner Freundin Judith für ihrer Unterstützung.

Des Weiteren gilt unser Dank den Mitarbeitern des Lehrstuhls Geometrie und Visualisierung an der TU München, für zahlreiche Anregungen, kritische Kommentare und Korrekturlesen des Manuskriptes in seinen verschiedenen Stadien; insbesondere an Michael Schmid und Jutta Niebauer für ihren umfangreichen Korrekturlesearbeiten.

Ein besonderes Dankeschön geht an Martin Peters vom Springer Verlag, der in seiner unvergleichlich unbürokratischen und kooperativen Art und Weise, eine schnelle Entstehung dieses Buchprojektes überhaupt erst ermöglicht hat.

Thorsten Orendt
Jürgen Richter-Gebert
Garching, Mai 2008

Inhaltsverzeichnis