

Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen

Dieter Schramm • Manfred Hiller
Roberto Bardini

Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen

 Springer

Prof. Dr.-Ing. Dieter Schramm
Leiter des Lehrstuhls für Mechatronik
Fakultät für Ingenieurwissenschaften
Universität Duisburg-Essen
Lotharstraße 1
47057 Duisburg
schramm@imech.de

Dr.-Ing. Roberto Bardini
ehemals wissenschaftlicher Mitarbeiter am
Lehrstuhl für Mechatronik an der
Universität Duisburg-Essen
Privatadresse:
Astallerstraße 9
80339 München
bardini@imech.de

Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. mult. Manfred
Hiller
ehemals Leiter des Lehrstuhls für
Mechatronik an der
Universität Duisburg-Essen
Privatadresse:
Paul-Schmitthenner-Straße 10
47443 Moers
hiller@imech.de

ISBN 978-3-540-89313-4 e-ISBN 978-3-540-89315-8
DOI 10.1007/978-3-540-89315-8
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandentwurf: eStudio Calamar S.L., Figueres/Berlin

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort

Dieses Buch behandelt die Grundlagen der Dynamik von Kraftfahrzeugen und deren mathematische Modellbildung und Simulation. Das Spektrum reicht von Einspurmodellen bis zu komplexen, räumlichen Mehrkörpermodellen. Der Leser wird in die Lage versetzt, eigene Simulationsmodelle zu entwickeln, kommerzielle Programme einzusetzen und deren Grundlagen zu verstehen, eine geeignete Modellierung auszuwählen und die Ergebnisse von Simulationen zu bewerten. Insbesondere wird der Prozess der Modellerstellung vom realen Fahrzeug bis zum mathematischen Modell sowie anhand von Beispielen die Validierung der Ergebnisse beschrieben.

Das Buch richtet sich an Studierende und Promovierende der Ingenieurwissenschaften, die Vorlesungen auf dem Gebiet der Fahrzeugtechnik besuchen oder eine Arbeit in diesem Umfeld anfertigen. In gleichem Maße richtet es sich aber auch an Entwickler und Forscher, die sich mit fahrdynamischen Fragestellungen beschäftigen oder Simulationsprogramme einsetzen. Da die Modellbildung der Fahrdynamik von Kraftfahrzeugen stark mathematisch orientiert ist, werden durchgehend mathematische Methoden eingesetzt. Der Leser sollte daher über mathematische Grundkenntnisse verfügen, wie sie in den ersten drei Semestern eines ingenieurwissenschaftlichen Studiums an einer Fachhochschule oder einer Universität vermittelt werden.

An der Entstehung dieses Buches waren neben den Autoren weitere Personen beteiligt, von denen hier stellvertretend einige genannt werden sollen. Wir danken Herrn Unterreiner für die sorgfältige Ausarbeitung der Beispiele sowie die Koordination der Korrekturen. Herrn Schijen danken wir für die mit viel Hingabe und Können erstellten Illustrationen und Herrn Kara für die sorgfältige Erstellung der Druckvorlage. Durch wertvolle Kommentare haben die Herren Höll, Lalo und Louis zum Entstehen des Buches beigetragen. Wir danken darüber hinaus Herrn Prof. Woernle, der durch die zur Verfügung gestellten Vorlesungsunterlagen wertvolle Anregungen zur Gestaltung einzelner Kapitel gegeben hat.

Dieter Schramm, Manfred Hiller und Roberto Bardini

Duisburg, im April 2010

Inhaltverzeichnis

Vorwort	V
Inhaltverzeichnis	VII
Nomenklatur und Bezeichnungen	1
1 Einleitung	7
1.1 Aufgabenstellung	7
1.1.1 Modellierung technischer Systeme	10
1.1.2 Systembegriff.....	11
1.1.3 Simulation und Simulationsumgebung	12
1.1.4 Fahrzeugmodelle.....	13
1.2 Gesamtfahrzeugmodelle	17
1.2.1 Fahrzeugmodelle und Anwendungsgebiete	19
1.2.2 Kommerzielle Fahrzeugsimulationssysteme.....	21
1.3 Inhaltsübersicht	23
1.4 Web-Seite zum Buch	24
2 Mathematische und kinematische Grundlagen	25
2.1 Vektoren.....	25
2.1.1 Elementare Rechenregeln für Vektoren	25
2.1.2 „Physikalische“ Vektoren	26
2.2 Koordinatensysteme und Komponenten	27
2.2.1 Koordinatensysteme.....	27
2.2.2 Komponentenerlegung	28
2.2.3 Zusammenhang zwischen Komponentendarstellungen	29
2.2.4 Eigenschaften der Transformationsmatrix	30
2.3 Lineare Vektorfunktionen und Tensoren 2. Stufe.....	31
2.3.1 Beispiele für Tensoren 2. Stufe.....	31
2.4 Freie Bewegung des starren Körpers	33
2.4.1 Allgemeine Bewegung des starren Körpers.....	33
2.4.2 Relativbewegung	37
2.4.3 Wichtige Bezugssysteme	39
2.5 Drehbewegungen	41

2.5.1	Räumliche Drehung und Winkelgeschwindigkeit	41
2.5.2	Parametrisierung von Drehbewegungen	42
2.5.3	Drehzeiger und Drehtensor	43
2.5.4	Drehzeiger und Winkelgeschwindigkeit	45
2.5.5	KARDAN-Winkel	46
3	Kinematik von Mehrkörpersystemen	51
3.1	Struktur kinematischer Ketten	51
3.1.1	Topologische Modellierung	52
3.2	Gelenke in kinematischen Ketten	55
3.2.1	Gelenke in räumlichen kinematischen Ketten	55
3.2.2	Gelenke in ebenen kinematischen Ketten	57
3.2.3	Gelenke in sphärischen kinematischen Ketten	58
3.2.4	Klassifizierung von Gelenken	58
3.3	Freiheitsgrade und verallgemeinerte Koordinaten	60
3.3.1	Freiheitsgrade kinematischer Ketten	60
3.3.2	Beispiele aus der Fahrwerkskinematik	61
3.3.3	Verallgemeinerte Koordinaten	62
3.4	Grundprinzipien des Zusammenbaus kinematischer Ketten	64
3.4.1	„Sparse“-Methoden	66
3.4.2	„Vector-Loop“-Methoden	68
3.4.3	Topologische Methoden	69
3.5	Kinematik des Gesamtsystems	72
3.5.1	Grundidee	72
3.5.2	Blockschaltbilder und kinematische Netze	73
3.5.3	Relativkinematik des räumlichen Gelenkvierecks	75
3.5.4	Relative, absolute und globale Kinematik	77
4	Bewegungsgleichungen komplexer Mehrkörpersysteme	83
4.1	Fundamentalgleichung der Dynamik für Punktmassen	83
4.2	Das JOURDAINSche Prinzip	85
4.3	LAGRANGESche Gleichungen erster Art für Punktmassen	85
4.4	LAGRANGESche Gleichungen zweiter Art für starre Körper	87
4.5	Das d'ALEMBERTSche Prinzip	88
4.6	Computergestütztes Aufstellen der Bewegungsgleichungen	91
4.6.1	Kinematische Differentiale der Absolutkinematik	91
4.6.2	Bewegungsgleichungen	94
4.6.3	Dynamik einer räumlichen Mehrkörperschleife	96
5	Kinematik und Dynamik des Fahrzeugaufbaus	105
5.1	Fahrzeugfestes Referenzsystem	105
5.2	Kinematische Analyse des Fahrgestells	108

5.2.1	Einbindung der Radaufhängungs-Kinematik.....	109
5.2.2	Bewegungsgleichungen	111
6	Modellierung und Analyse von Radaufhängungen	113
6.1	Funktion von Radaufhängungssystemen	113
6.2	Typen von Radaufhängungen	115
6.2.1	Starrachsen.....	116
6.2.2	Verbundlenkerachsen.....	118
6.2.3	Längslenkerachsen.....	119
6.2.4	Schräglenkerachsen	120
6.2.5	Doppelquerlenkerachsen.....	122
6.2.6	Radaufhängungen nach dem McPherson-Prinzip	123
6.2.7	Mehrlenkerachsen.....	125
6.3	Kenngrößen von Radaufhängungen.....	127
6.4	Eindimensionale Viertelfahrzeugmodelle.....	130
6.5	Räumliches Modell einer McPherson-Radaufhängung	133
6.5.1	Kinematische Analyse	134
6.5.2	Explizite Lösung	138
6.6	Räumliches Modell einer Fünfpunkt-Hinterradaufhängung ...	144
6.6.1	Kinematische Analyse	145
6.6.2	Implizite Lösung	148
6.6.3	Simulationsergebnisse des räumlichen Viertelfahrzeugmodells	152
7	Modellierung des Rad-Straße-Kontaktes	159
7.1	Aufbau des Reifens.....	160
7.2	Kraftwirkung zwischen Rad und Straße	161
7.3	Stationäre Reifenkontaktkräfte	162
7.3.1	Reifen unter Vertikallast.....	163
7.3.2	Rollwiderstand	164
7.3.3	Reifen unter Umfangskraft	165
7.3.4	Reifen unter Seitenkraft	179
7.3.5	Einfluss des Radsturzes auf die Reifenseitenkraft	182
7.3.6	Einfluss der Radlast auf die Radkräfte in der Lauffläche	183
7.3.7	Grundsätzliche Struktur der Radkräfte	183
7.3.8	Überlagerung von Umfangs- und Seitenkräften	184
7.4	Reifenmodelle.....	187
7.4.1	Die Kontaktpunkt-Geometrie.....	188
7.4.2	Kontakt-Geschwindigkeiten	193
7.4.3	Berechnung der Schlupfgrößen.....	195
7.4.4	Magic Formula Modelle	195
7.4.5	Magic Formula Modelle für überlagerten Schlupf	198

7.4.6	HSRI-Reifenmodell	199
7.5	Instationäres Reifenverhalten	202
8	Modellierung des Antriebsstranges	205
8.1	Antriebskonzepte	205
8.2	Modellbildung.....	206
8.2.1	Bewegungen des Motorblockes	207
8.2.2	Modell des Antriebsstranges.....	208
8.2.3	Motorlager	209
8.2.4	Modellierung der Gleichlaufgelenke	215
8.3	Modell des Motors	217
8.4	Relativkinematik des Antriebsstranges.....	219
8.5	Absolutkinematik des Antriebsstranges.....	221
8.6	Bewegungsgleichungen	222
8.7	Diskussion von Simulationsergebnissen.....	223
9	Kraftkomponenten	225
9.1	Kräfte und Momente in Mehrkörpersystemen	226
9.1.1	Reaktionskräfte	227
9.1.2	Eingeprägte Kräfte.....	228
9.2	Betriebsbremse	229
9.3	Luftkräfte	230
9.4	Feder- und Dämpferkomponenten	232
9.4.1	Federelemente.....	232
9.4.2	Dämpferelemente.....	234
9.4.3	Parallel geschaltete Krafterelemente.....	235
9.4.4	In Reihe geschaltete Krafterelemente	235
9.5	Stabilisatoren	236
9.5.1	Passive Stabilisatoren	236
9.5.2	Aktive Stabilisatoren.....	239
9.6	Gummi-Verbund-Elemente	241
10	Einspurmodelle.....	243
10.1	Lineares Einspurmodell	243
10.1.1	Bewegungsgleichungen des linearen Einspurmodells	244
10.1.2	Stationäres Lenkverhalten und Kreisfahrt	249
10.1.3	Instationäres Lenkverhalten - Fahrstabilität.....	253
10.2	Nichtlineares Einspurmodell.....	254
10.2.1	Kinetik des nichtlinearen Einspurmodells	255
10.2.2	Reifenkräfte	258
10.2.3	Antriebs- und Bremsmomente	261
10.2.4	Bewegungsgleichungen	263

10.2.5	Zustandsgleichungen	264
10.3	Lineares Wankmodell	266
10.3.1	Bewegungsgleichung für das Wanken des Aufbaus	268
10.3.2	Dynamische Radlasten	271
10.3.3	Beeinflussung des Eigenlenkverhaltens	273
11	Zweispurmodelle.....	277
11.1	Zweispurmodell ohne Radaufhängungskinematik	277
11.1.1	Impuls- und Drallsätze	280
11.1.2	Feder- und Dämpferkräfte	283
11.1.3	Impuls- und Drallsätze der Räder	284
11.1.4	Rad-Strasse-Kontakt	285
11.1.5	Antriebsstrang	288
11.1.6	Bremsssystem	290
11.1.7	Bewegungsgleichungen	290
11.2	Zweispurmodell mit kinematischen Radaufhängungen	292
11.2.1	Freiheitsgrade des Zweispurmodells	292
11.2.2	Kinematik des Fahrzeugaufbaus	294
11.2.3	Allgemeine Kinematik der Radaufhängungen	297
11.2.4	Radaufhängung mit Schräglenkern	302
11.2.5	Kinematik der Räder bei der Schräglenkeraufhängung ...	308
11.2.6	Radkräfte und –momente	310
11.2.7	Aufbaufedern und -dämpfer	311
11.2.8	Windkräfte	312
11.2.9	Lenkung	313
11.2.10	Stabilisator	314
11.2.11	Eingeprägte Kräfte und Momente	314
11.2.12	NEWTON-EULERSche Gleichungen	315
11.2.13	Bewegungs- und Zustandsgleichungen	319
11.3	Ein einfaches Fahrermodell	319
11.3.1	Reglerkonzept	320
11.4	Parametrierung	322
12	Räumliche Gesamtfahrzeugmodelle	325
12.1	Modellierung eines Gesamtfahrzeuges	325
12.1.1	Kinematik eines heckgetriebenen Fahrzeugmodells	326
12.1.2	Kinematik front- und allradgetriebener Gesamtmodelle	337
12.1.3	Dynamik des Gesamtfahrzeugmodells	354
12.2	Simulation von Kraftfahrzeugen	355
12.2.1	Aufbau und Konzept von FASIM_C++	356
12.2.2	Modulare Struktur eines Fahrzeugmodells	359
12.2.3	Aufstellen der Bewegungsgleichungen	365

12.2.4	Numerische Integration.....	373
12.2.5	Behandlung von Ereignissen	376
13	Modell eines typischen komplexen Gesamtfahrzeugs	379
13.1	Modellierung des Gesamtfahrzeugs.....	379
13.2	Modellverifikation und -validierung.....	383
13.3	Parametriertes Fahrzeugmodell	393
14	Ausgewählte Anwendungen.....	403
14.1	Simulation eines Lenkwinkelsprungs (ISO 7401)	403
14.2	Simulation von Fahrzeugüberschlägen	406
14.2.1	Virtuelles Testgelände	410
14.2.2	Simulationsergebnisse	415
14.3	Regelung der Wankdynamik durch aktive Stabilisatoren....	428
14.3.1	Passive Stabilisatoren	429
14.3.2	Steifigkeitsverteilung zwischen Vorder- und Hinterachse	430
14.3.3	Regelung der Wankdynamik durch aktive Stabilisatoren	433
14.3.4	Reglerentwurf	433
14.3.5	Führungs- und Störverhalten	437
14.3.6	Wankmomentenverteilung mit Fuzzy-Logik.....	437
14.3.7	Wirkprinzip.....	438
14.3.8	Potential einer Wankmomentenverteilung.....	440
	Literaturverzeichnis	443
	Kurzbiografien der Autoren	453
	Stichwortverzeichnis.....	455

Nomenklatur und Bezeichnungen

Variable und physikalische Größen

Die Namen von Variablen und physikalischen Größen werden in der Regel kursiv geschrieben. Die Bezeichnungen von Orten (Punkten), Komponenten und Namen von Koordinatensystemen, Zahlen sowie Standardfunktionen, wie z.B. „sin“ oder „cos“ werden nichtkursiv geschrieben.

Für Vektoren und Tensoren sowie Matrizen gilt zusätzlich:

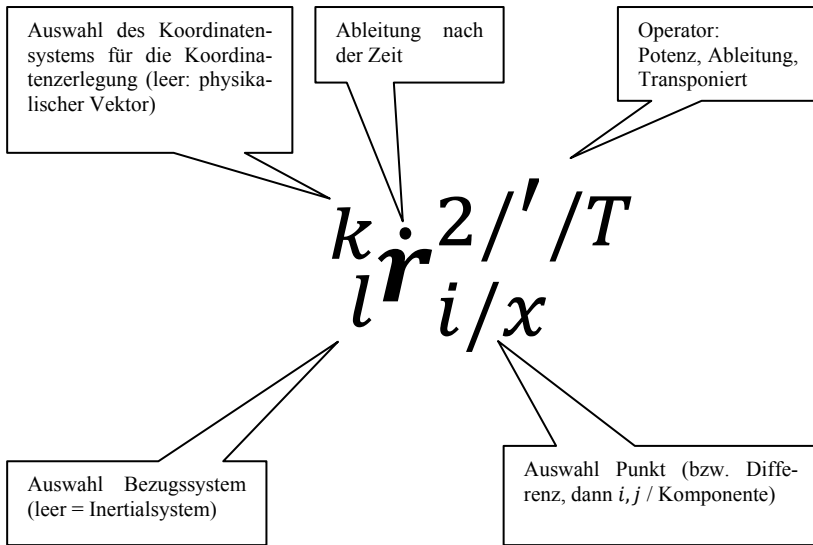
- Vektoren werden durch fett gedruckte Kleinbuchstaben, Tensoren und Matrizen durch fett gedruckte Großbuchstaben dargestellt.
- Zeitliche Ableitungen werden durch Punkte über der jeweiligen Größe gekennzeichnet.

Spezielle Notation für physikalische Vektoren

Die Indizierung von Vektoren und Tensoren erfolgt entsprechend folgender Regeln:

- Ein *rechts unten* stehender Index dient als Bezeichnungs- und Zählvariable. Er kennzeichnet z.B. den Körper oder das Koordinatensystem der betreffenden Größe.
- Bei Größen, die relativ zu anderen Größen beschrieben werden, kennzeichnet ein Index *links unten* den *Bezugskörper* oder das *Bezugskordinatensystem*. Ein fehlender Index kennzeichnet das *Inertialsystem* als Bezugssystem.
- Für den Fall, dass ein physikalischer Vektor oder Drehtensor in Koordinaten angegeben wird, erfolgt die Angabe des Koordinatensystems, in dem die Koordinaten angegeben werden, durch einen *linken oberen* Index. Ist *kein* Index angegeben, so handelt es sich um einen physikalischen Vektor oder Drehtensor ohne Angabe eines spezifischen Koordinatensystems.

- *Operatoren*, wie Potenzen, Transponierung, Invertierung sowie Ableitungen nach anderen Größen als der Zeit, werden durch ein entsprechendes Zeichen *rechts oben* gekennzeichnet.
- Über der jeweiligen Variablen wird die Ableitung nach der Zeit gekennzeichnet. Dort können auch weitere Kennzeichnungen erfolgen, wie z.B. Überstriche „ $\bar{}$ “ oder Tilden „ $\tilde{}$ “.



Beispiele für Indizierung

- \dot{r}_i : Absolutgeschwindigkeit des Punktes P_i
- $\dot{r}_{i,j}$: Absolutgeschwindigkeit (absolute zeitliche Veränderung) des Differenzvektors $r_j - r_i$
- ${}_k \dot{r}_i$: Relativgeschwindigkeit von „ i “ bezüglich des Bezugssystems „ k “
- ${}_k \dot{r}_{i,j}$: Relativgeschwindigkeit ${}_k \dot{r}_i - {}_k \dot{r}_j$
- ${}_k^j v_j$: Koordinatendarstellung der Absolutgeschwindigkeit des Punktes P_j relativ zum Koordinatensystem „ k “, koordinatenweise dargestellt im Koordinatensystem „ j “

jT_i : Drehtensor, welcher die Koordinatendarstellung eines Vektors „ \mathbf{a} “ im Koordinatensystem „ i “ in das Koordinatensystem „ j “ transformiert: „ ${}^j\mathbf{a} = {}^jT_i {}^i\mathbf{a}$ “.

Partielle Ableitungen einer m - dimensionalen Vektorfunktion

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

nach den Koordinaten eines n - dimensionalen Vektors \mathbf{x} werden in einer (m, n) - dimensionalen *Funktional- oder JACOBI-Matrix* angeordnet:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Beispiele für „Physikalische“ Vektoren und ihre Darstellung

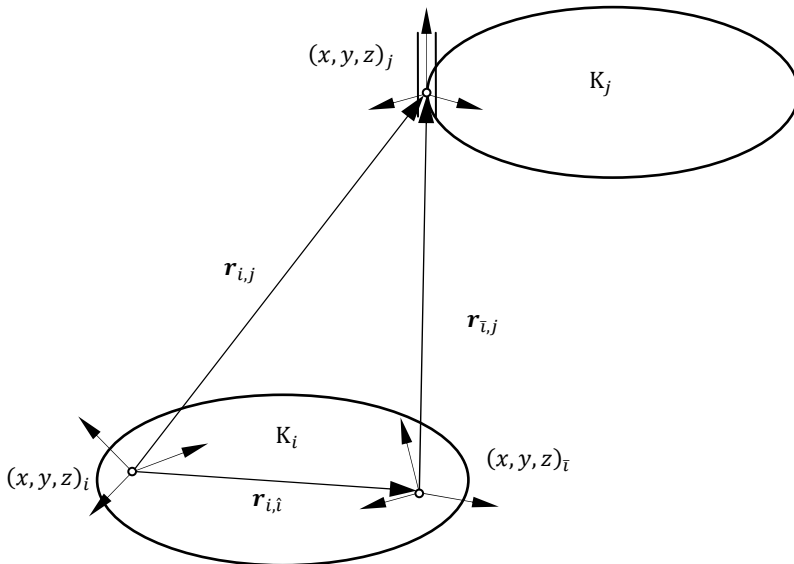
- $\mathbf{e}_{x_i}, \mathbf{e}_{y_i}, \mathbf{e}_{z_i}$: Einheitsvektoren für Basissysteme
- \mathbf{u}_i : normierter Richtungsvektor (Gelenkachsen)
- \mathbf{r}_i : Ortsvektor zum Bezugspunkt O_i des „Objekts“ (Körpers) „ i “
- $\mathbf{r}_{\bar{i}}$: Ortsvektor zum Vorgänger des Bezugspunktes O_i
- \mathbf{s}_i : Ortsvektor zum Schwerpunkt S_i
- \mathbf{p}_i : Ortsvektor zum „point of interest“ P_i (z.B. Kraftangriffspunkt)
- $\mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$: Differenzvektor zwischen zwei Bezugspunkten P_i, P_j
- $\mathbf{v}_i, \dot{\mathbf{v}}_i, \mathbf{a}_i$: Geschwindigkeit, Beschleunigungen
- $\boldsymbol{\omega}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i, \boldsymbol{\alpha}_i$: Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigungen
- \mathbf{F}_i : Kraft
- $\mathbf{L}_i, \mathbf{T}_i$: Drehmoment
- $\boldsymbol{\Theta}_{S_i}, \theta_{S_i}$: Trägheitstensor, Trägheitsmoment
- \mathbf{T}_i : Drehtensor
- $(x, y, z)_i$: Koordinatensystem (K_i)
- $K_i = \{O_i; x_i, y_i, z_i\}$: Koordinatensystem (K_i), alternative Schreibweise
- x_i, y_i, z_i : Koordinatenachsen
- ξ_i, η_i, ζ_i : Koordinatenachsen

Skalare

- m_i : Masse
- i, j, k, \dots : Indizes
- N, n : Anzahl von Elementen, Komponenten (z.B. n_β, N_β)
- α : Winkel
- f : Freiheitsgrade (auch f_i)

Vektoren und Matrizen

- E, I : Einheitsmatrix, Einheitstensor
- g : „Vektor“ der impliziten Bindungsgleichungen
- q : „Vektor“ der verallgemeinerten Koordinaten
- M : Massenmatrix
- b : „Vektor“ der verallgemeinerten Zentripetal- und Corioliskräfte
- Q : verallgemeinerte Kräfte
- β : relative oder natürliche Gelenkkordinaten
- $e^{(i)}$: $\left[0, 0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0, 0 \right]$
- w : Lagekoordinaten
- Z : Reaktionskräfte



Trigonometrische Funktionen

Aus Platzgründen wird häufig z.B. statt „ $\cos \varphi$ “ die Kurzform „ $c\varphi$ “ und statt „ $\sin \varphi$ “ „ $s\varphi$ “ verwendet.

$$\dot{\mathbf{r}}_j = \dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{r}}_{i,j}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{i,j} = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,j} + \dot{\mathbf{r}}_{i,j}$$

$${}_i\dot{\mathbf{r}}_{i,j} = {}_i\dot{\mathbf{r}}_j = {}_j\dot{\mathbf{r}}_j$$

(ohne Komponenten!)

Beachte:

$$\mathbf{r}_{i,j} = {}_i\mathbf{r}_j$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{i,j} \neq {}_i\dot{\mathbf{r}}_j$$