

Mathematik für das Lehramt

Mathematik für das Lehramt

K. Reiss/G. Schmieder[†]: Basiswissen Zahlentheorie

A. Büchter/H.-W. Henn: Elementare Stochastik

Engel, J.: Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion

Herausgeber: Prof. Dr. Kristina Reiss, Prof. Dr. Rudolf Scharlau, Prof. Dr. Thomas Sonar, Prof. Dr. Hans-Georg Weigand

Joachim Engel

Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion

Eine Einführung in die mathematische
Modellbildung für Lehramtsstudierende

Prof. Dr. Joachim Engel
Institut für Mathematik und Informatik
Pädagogische Hochschule Ludwigsburg
Reuteallee 46
71634 Ludwigsburg
engel@ph-ludwigsburg.de

Zusätzliches Material zu diesem Buch kann von <http://extra.springer.com> heruntergeladen werden

ISBN 978-3-540-89086-7 e-ISBN 978-3-540-89087-4
DOI 10.1007/978-3-540-88544-3
Springer Dordrecht Heidelberg London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 62-01, 62-02, 92-01, 92-02, 39-01, 34-01

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz und Herstellung: le-tex publishing services GmbH, Leipzig

Einbandentwurf: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.de)

Für Clara, Leah und Sophie

Vorwort

Eine der häufigsten Fragen gegenüber der Schulmathematik lautet: *Wozu brauche ich Mathematik?* Diese Frage kann mit den üblichen Vorlesungen im Lehramtsstudium oft nur unbefriedigend beantwortet werden. Dieses Buch will dazu beitragen, einige Gebiete der Mathematik vorzustellen, in denen Mathematik eine entscheidende Rolle zur Lösung von außermathematischen Fragestellungen spielt, diese Mathematik aber weitgehend noch so elementar ist, dass sie auch in die Schulmathematik mit einfließen kann. Im Mittelpunkt stehen beispielhafte und elementare Konzepte, Mathematik auf ausgewählte Sachprobleme anzuwenden und darüber zu reflektieren, wie Mathematik zu einem besseren Verstehen der Sachsituation beitragen kann.

Anwendungen von Mathematik stehen in diesem Buch im Zentrum, es wird dabei aber auch immer um bestimmte mathematische Techniken sowie um Vorgehensweisen beim Anwenden von Mathematik gehen. Die Beispiele erstrecken sich über technisch-naturwissenschaftliche Fragestellungen bis hin zu Modellierungen ökonomischer, biologischer und soziologischer Phänomene. Da sich dieses Buch besonders an angehende Mathematiklehrerinnen und -lehrer wendet und kein Lehrbuch über Ökonomie, Technik oder Soziobiologie ist, gliedert es sich nach einer von der Mathematik motivierten Systematik. Wir orientieren uns an Vorgehensweisen, **funktionale Abhängigkeiten zwischen zwei Größen mit mathematischen Mitteln zu modellieren**. Dabei werden wir an verschiedenen Stellen auf Inhalte aus Analysis, Stochastik, linearer Algebra und Numerik zurückgreifen.

Zum Umgang mit diesem Buch

Mein zentrales Anliegen besteht darin, ein bis in die Schulmathematik der unteren und mittleren Klassen reichendes aktuelles Thema der modernen Mathematik konsistent darzustellen. Der Leser wird dabei erfahren, wie mit zunehmender mathematischer Kompetenz verfeinerte Methoden eingesetzt werden können, um auf zunehmend anspruchsvollere Weise in komplexeren Situationen ein und dasselbe Ziel zu verfolgen: Abhängigkeiten zwischen zwei Größen zu modellieren. Gleichzeitig will das Buch aufzeigen, wie grundlegende Ideen zum Modellieren funktionaler Abhängigkeiten bei entsprechender Elementarisierung bis in die Schulmathematik hinein lebendig und wirklichkeitsnah gestaltet werden können. Eine curriculare Basis dafür ist die Tatsache, dass sowohl der Funktionsbegriff als auch das Modellbildungskonzept allgemein als fundamentale mathematische Ideen akzeptiert und als Leitideen des Mathematikunterrichts¹ etabliert sind.

¹siehe KMK Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss von 2004 sowie Bildungsstandards der meisten Bundesländer im gleichen Zeitraum

Die Inhalte des vorliegenden Buches wurden in mehreren Vorlesungen für Lehramtsstudierende erprobt. Vorlesungen für Studierende des Lehramtes an Realschulen im 3. Semester (und mit Abstrichen hiervon auch Vorlesungen für angehende Grundschullehrer und -lehrerinnen) basierten bis auf wenige Auslassungen auf den Kap. 1, 2, 4.2, 4.4 und 5.1 bis 5.3. Diese Kapitel setzen kaum mehr an mathematischen Vorkenntnissen voraus als was in der Mittelstufe des Gymnasiums gelehrt wird. Kapitel 3 (Splines und Polynominterpolation) und 4.3 (Differenzgleichung und Chaos), 4.5 und 4.6 (Differenzialgleichungen) verlangen sichere Kenntnisse der Oberstufenmathematik in Analysis und Linearer Algebra. Diese Kapitel waren unter dem Titel „Angewandte Analysis“ Inhalt von fortgeschrittenen Vorlesungen für Studierende des Realschullehramtes. Eine mehrmals durchgeführte Vorlesung für Studierende des gymnasialen Lehramtes an der Universität Hannover „Anwendungsorientierte Mathematik, Modellbildung und Informatik“ beinhaltete im Wesentlichen die Inhalte der Kap. 1 bis 5.7. Bei einigen Teilen dieser Kapitel sind Kenntnisse aus einführenden Veranstaltungen in Analysis und Linearer Algebra, wie sie in gymnasialen Studiengängen an Universitäten die Regel sind, gewiss sehr hilfreich. Inhaltlich am anspruchsvollsten sind wohl Abschn. 5.8 über nichtlineare Regression sowie Kap. 7 zu den mathematischen Grundlagen des nichtparametrischen Kurvenschätzens. Diese Kapitel sind zur Vertiefung für Studierende der Mathematik im Hauptstudium mit guten Kenntnissen in multivariater Analysis und Stochastik. Diese Teile führen an neuere computerintensive mathematische Methoden heran, die erst im Gefolge der Verfügbarkeit leistungsfähiger Hard- und Software im Laufe der letzten 30 Jahre entwickelt wurden.

Anwendungsorientierte Mathematik ist heutzutage ohne Computereinsatz nicht mehr denkbar – und zwar auf allen Ebenen, vom Mathematikunterricht in der frühen Sekundarstufe I, über die Sekundarstufe II bis hin zur Hochschulmathematik. Technologie wird dabei eingesetzt, um lästige, aber im Prinzip verstandene Mathematik an den „Rechenknecht“ Computer zu delegieren, aber auch als multimediales Mittel zur Veranschaulichung, um Konzepte zu illustrieren und zu entdecken. Zum Arbeiten in diesem Buch können verschiedene Software-Pakete wie Computer-Algebra-Systeme (CAS) oder Tabellenkalkulationssysteme (TBK) eingesetzt werden. Für viele Problemstellungen eignet sich besonders die Software FATHOM (von engl. *to fathom* = ausloten), einer in den USA entwickelten Lernsoftware zum Anwenden von Mathematik, die auch in deutscher Version vorliegt (Biehler et al., 2006).

FATHOM erweist sich insbesondere in den Kap. 2 und 5 als sehr nützlich, wengleich alle Problemstellungen in diesen beiden Kapiteln ebenso (wenn auch weit weniger komfortabel) mit einem CAS wie z. B. MAPLE oder MATHEMATICA oder mit Tabellenkalkulationssoftware wie Microsoft EXCEL oder

mit dem frei verfügbaren OPENOFFICE bearbeitet werden können. In anderen Kapiteln bieten CAS (Kap. 3 und 4) oder Tabellenkalkulationssysteme (Kap. 4) eine geeignete technologische Umgebung zur Problembearbeitung. Bei einigen Fragestellungen in den Kap. 5 bis 7 empfiehlt sich das statistische Programmiersystem R, das sich im akademischen Bereich weitgehend durchgesetzt hat und unter <http://cran.r-project.org> frei erhältlich ist.

Auf <http://extras.springer.com> finden sich alle hier behandelten Datensätze und Programme in den geeigneten Formaten von FATHOM, MAPLE, EXCEL sowie als Textdatei. Für dieses Buch wurde eine Homepage eingerichtet, in der neben weiteren ergänzenden Beispielen und Illustrationen auch aktualisierte Internetadressen mit Vertiefungen und Illustrationen zu einzelnen Themenbereichen zu finden sind.

<http://www.joachimengel.eu>

➤ Danksagung

Viele Anregungen und Beispiele in den Kap. 2 und 5 stammen aus dem empfehlenswerten Buch von Tim Erickson (2007): *The Model Shop. Using Data to Learn about Elementary Functions, eeps Media: Oakland, CA*.

Ein anderes empfehlenswertes Buch, aus dem verschiedene hier vorgestellte Ideen entnommen sind, ist das Buch von Thomas Sonar (2002) *Anwendungsorientierte Mathematik, Modellbildung und Informatik*. Das vorliegende Buch hätte nicht entstehen können durch stetige Anregungen, Diskussionen, Rückmeldungen und Ermutigungen von zahlreichen Kolleginnen und Kollegen. Mein ganz herzlicher Dank geht an Rolf Biehler, Tim Erickson, Martin Gundlach, Silke Haußmann, Marcus Herzberg, Norbert Herrmann, Ludger Jansen, Jan-Martin Klinge, Laura Martignon, Carmen Maxara, Thomas Rubitzko, Angela Stevens, Reimund Vehling, Markus Vogel, Claudia Wörn und Marc Zimmermann sowie den Studentinnen und Studenten meiner Vorlesungen über Modellbildung. Dem Springer-Verlag danke ich für die stete Ermutigung und kompetente Unterstützung bei der Fertigstellung dieses Buches. Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Familie, die mich – begeistert von der Idee dieses Buches – geduldig ertragen hat.

Ludwigsburg,
Mai 2009

Joachim Engel

Inhaltsverzeichnis

	Vorwort	VII
1	Was heißt: „Mathematik anwenden“?	1
1.1	Was ist Modellbilden?	4
1.2	Modellieren funktionaler Abhängigkeiten	17
1.3	Überblick über die folgenden Kapitel	18
1.4	Rolle von realen Daten	20
1.5	Rolle von Software und Multimedia	23
2	Standardmodelle und Naturgesetz	29
2.1	Einleitung	31
2.2	Einige Standardmodelle im Überblick	39
2.3	Spezielle Eigenschaften einiger Standardmodelle	44
2.3.1	Proportionalität und lineare Funktionen	44
2.3.2	Antiproportionalität	49
2.3.3	Polynome und Potenzfunktionen	58
2.3.4	Exponential- und Logarithmusfunktionen	69
2.3.5	Winkelfunktionen	77
2.4	Techniken zum Modellieren mit Funktionen	88
2.4.1	Operationen mit Funktionen	89
2.4.2	Logistische Funktionen	91
2.4.3	Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus	95
2.4.4	Verkettungen von Funktionen	97
2.4.5	Transformation der Achsen	99
2.4.6	Ockhams Rasiermesser, Platons Bart und die Warnung vor zu viel Komplexität	104
3	Lass die Daten sprechen	109
3.1	Einleitung	111
3.2	Lineare Interpolation	112
3.3	Interpolation durch Polynome	113
3.3.1	Lagrange-Polynome	118
3.3.2	Newton-Polynome	121
3.3.3	Maximale Geschwindigkeit und Beschleunigung des Sprinters	125
3.3.4	Interpolationsfehler	127
3.4	Splines	132
3.4.1	Minimaleigenschaft	136
3.4.2	Konvergenzverhalten von Splines	138

4	Die Grenzen des Wachstums	143
4.1	Einleitung	145
4.2	Diskrete Modellierung von Wachstumsprozessen	146
4.2.1	Lineares Wachstum	147
4.2.2	Quadratisches Wachstum	148
4.2.3	Freies oder exponentielles Wachstum	150
4.2.4	Graphische Iterationen und Spinnwebdiagramme	151
4.2.5	Begrenztes Wachstum	152
4.2.6	Logistisches Wachstum	154
4.2.7	Zeitverzögertes Wachstum: Ein Beispiel	157
4.2.8	Ein Mordfall	161
4.3	Logistische Differenzgleichung und Chaos	167
4.3.1	Exkurs: Mathematische Analyse der logistischen Differenzgleichung	170
4.3.2	Zusammenfassung	173
4.4	Diskrete Modellierungen gekoppelter Populationen	175
4.4.1	Masernepidemien	175
4.4.2	Populationen in Wechselwirkung	179
4.5	Stetige Modellierungen von Wachstumsprozessen	187
4.5.1	Exkurs Lösen von Differenzialgleichungen	191
4.5.2	Logistisches Wachstum	196
4.5.3	Weitere Wachstumsformen	201
4.6	Stetige Modellierung gekoppelter Systeme	207
4.6.1	Epidemien	207
4.6.2	Population in Wechselwirkung: Stetige Version	209
4.6.3	Der Kampf ums Dasein: Räuber-Beute-Modelle	211
5	Verrauschte Signale und funktionale Modelle	219
5.1	Einleitung	221
5.2	Prinzip der kleinsten Quadrate: Regressionsgerade	227
5.3	Eigenschaften der Regressionsgeraden	234
5.4	Korrelation	244
5.5	Varianzanalyse	249
5.6	Regression und Lineare Algebra	256
5.7	Nichtlineare Zusammenhänge: Der Transformationsan- satz	262
5.8	Funktionsanpassung logistischer Modelle	273
5.9	Grundzüge der nichtlinearen Regression	277
5.9.1	Spezialfall: Lineare Regression	279
5.9.2	Der allgemeine Fall	280
5.9.3	Der Gauß-Newton-Algorithmus	282

5.9.4	Zur Konvergenz des Gauß-Newton-Algorithmus	285
5.9.5	Der Gauß-Newton-Algorithmus für einparametrische Funktionen	286
5.10	Zusammenfassung: Parametrische Kurvenanpassung ...	297
6	Durch Glätten der Daten zur Funktion	305
6.1	Einleitung	307
6.2	Bivariate Verteilungen, gleitende Boxplots und Regressogramm	308
6.3	Gleitende Mittelwerte	314
6.4	Zeitreihen	317
6.5	Von der gleitenden Mittelwertkurve zum Kernschätzer ..	322
7	Nichtparametrische Methoden zum Kurvenschätzen	333
7.1	Einleitung	335
7.2	Kernschätzer unter festem Design	337
7.2.1	Faltungsschätzer: Definition und Beispiele	337
7.2.2	Mathematische Eigenschaften: Bias, Varianz	342
7.2.3	Wahl der Kernfunktion K	347
7.2.4	Wahl der Bandbreite	351
7.2.5	Randverhalten	355
7.3	Kernschätzer unter zufälligem Design	360
7.4	Lokal-lineare Approximation	363
7.5	Lokal-polynomiale Anpassung	368
7.6	Ergänzungen und Vertiefungen	371
7.6.1	Zur Asymptotik des lokal-polynomialen Schätzers	371
7.6.2	Schätzen von Ableitungen	375
7.6.3	Glätten ohne parametrischen Bezug	377
7.6.4	Glätten mit Splines	379
7.6.5	Komplexere Modelle	381
7.7	Zusammenfassung	385
A	Beschreibung der Datensätze	389
B	Anmerkungen zur Software	419
B.1	FATHOM	421
B.2	EXCEL	436
B.3	R	437

C	Lösungen zu ausgewählten Aufgaben	441
	Literatur	459
	Sachverzeichnis	465