





**Prof. Dr.-Ing. Dietmar Gross**

studierte Angewandte Mechanik und promovierte an der Universität Rostock. Er habilitierte an der Universität Stuttgart und ist seit 1976 Professor für Mechanik an der TU Darmstadt. Seine Arbeitsgebiete sind unter anderen die Festkörper- und Strukturmechanik sowie die Bruchmechanik. Hierbei ist er auch mit der Modellierung mikromechanischer Prozesse befasst. Er ist Mitherausgeber mehrerer internationaler Fachzeitschriften sowie Autor zahlreicher Lehr- und Fachbücher.



**Prof. Dr. Werner Hauger**

studierte Angewandte Mathematik und Mechanik an der Universität Karlsruhe und promovierte an der Northwestern University in Evanston/Illinois. Er war mehrere Jahre in der Industrie tätig, hatte eine Professur an der Universität der Bundeswehr in Hamburg und wurde 1978 an die TU Darmstadt berufen. Sein Arbeitsgebiet ist die Festkörpermechanik mit den Schwerpunkten Stabilitätstheorie, Plastodynamik und Biomechanik. Er ist Autor von Lehrbüchern und Mitherausgeber internationaler Fachzeitschriften.



**Prof. Dr.-Ing. Peter Wriggers**

studierte Bauingenieur- und Vermessungswesen, promovierte 1980 an der Universität Hannover und habilitierte 1986 im Fach Mechanik. Er war Gastprofessor an der UC Berkeley, USA, Professor für Mechanik an der TH Darmstadt und Direktor des Darmstädter Zentrums für Wissenschaftliches Rechnen. Seit 1998 ist er Professor für Baumechanik und Numerische Mechanik sowie Direktor des Zentrums für Computational Engineering Sciences an der Universität Hannover. Er ist Mitherausgeber von 11 internationalen Journals und Editor-in-Chief der Zeitschrift Computational Mechanics.

Dietmar Gross · Werner Hauger  
Peter Wriggers

---

# Technische Mechanik

**Band 4: Hydromechanik,  
Elemente der Höheren Mechanik,  
Numerische Methoden**

6., vollständig neu bearbeitete Auflage

Mit 213 Abbildungen

 Springer

Prof. Dr.-Ing. Dietmar Gross  
Prof. Dr. Werner Hauger  
Prof. Dr. rer. nat. Dr.-Ing. E.h. Walter Schnell †  
Institut für Mechanik  
Technische Universität Darmstadt  
Hochschulstraße 1  
64289 Darmstadt

Prof. Dr.-Ing. Peter Wriggers  
Institut für Baumechanik  
und Numerische Mechanik  
Universität Hannover  
Appelstraße 9a  
30167 Hannover

---

Bisher erschienen unter „Gross, Hauger, Schnell, Wriggers: Technische Mechanik 4“

---

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;  
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-540-70737-0 6. Aufl. Springer Berlin Heidelberg New York  
ISBN 978-3-540-22099-2 5. Aufl. Springer Berlin Heidelberg New York

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funk- sendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media  
[springer.de](http://springer.de)

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1993, 1995, 1999, 2002, 2004 und 2007

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Sollte in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z.B. DIN, VDI, VDE) Bezug genommen oder aus ihnen zitiert worden sein, so kann der Verlag keine Gewähr für die Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernehmen. Es empfiehlt sich, gegebenenfalls für die eigenen Arbeiten die vollständigen Vorschriften oder Richtlinien in der jeweils gültigen Fassung hinzuzuziehen.

Satz: Reproduktionsfertige Vorlagen der Autoren  
Herstellung: LE- $\text{\TeX}$  Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig  
Umschlaggestaltung: WMXDdesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier SPIN: 11873112 7/3100/YL - 5 4 3 2 1 0

## Vorwort

Der vorliegende vierte Band schließt das mehrbändige Lehrbuch der Technischen Mechanik ab. Behandelt werden in ihm die Grundlagen und wichtige Elemente der Hydromechanik, der Elastizitätstheorie, der Tragwerkslehre, der Schwingungen von Kontinua, der Stabilitätstheorie, der Plastizität und Viskoelastizität sowie der Numerischen Methoden in der Mechanik. Es handelt sich dabei um Gebiete, die vollständig oder einführend an vielen deutschsprachigen Hochschulen im Grundstudium gelehrt werden. Beispiele hierfür sind die Stromfadentheorie, spezielle Tragwerke wie das Seil und die Platte oder die Einführung in die Elastizitätstheorie und die Plastizität. In Teilen der einzelnen Kapitel schlägt der dargestellte Stoff aber auch schon die Brücke zum Fachstudium. Dies trifft unter anderem auf die Schwingungen von Balken und Platten, auf die Stabilität von Tragwerken oder auf die Methode der Finiten Elemente zu.

Das Buch wendet sich an Ingenieurstudenten aller Fachrichtungen, für welche die genannten Gebiete gelehrt werden. Unser Ziel ist es, den Leser an die wesentlichen Grundlagen heranzuführen und ein solides Fundament zu legen, das ein tieferes Eindringen in die einzelnen Fachdisziplinen erleichtert. Angesprochen ist auch der Praktiker in der Industrie, dem das Buch einen einfachen Einstieg in die entsprechenden Gebiete ermöglichen soll.

Wie in den vorhergehenden Bänden haben wir uns um eine möglichst einfache aber präzise Darstellung des Stoffs bemüht. Diesem Anliegen dienen auch die zahlreichen durchgerechneten Beispiele. Sie sollen das Verständnis unterstützen und eine Anleitung zur Behandlung ähnlicher Probleme bilden.

Die freundliche Aufnahme des Werkes bei der Leserschaft macht diese Neuauflage erforderlich. Wir haben sie genutzt, um eine Reihe von Verbesserungen und Ergänzungen vorzunehmen. Das Lehrbuch Technische Mechanik 4 geht zu einem guten Teil auf unseren verstorbenen Kollegen Prof. Dr. Dr.h.c. Walter Schnell zurück, der bis zur dritten Auflage Mitautor war. Seine Hand-

schrift ist in der vorliegenden Neuauflage trotz der Überarbeitung immer noch deutlich zu erkennen.

Wir danken dem Springer-Verlag für das Eingehen auf unsere Wünsche und für die ansprechende Ausstattung des Buches.

Darmstadt und Hannover, im Januar 2007

*D. Gross*  
*W. Hauger*  
*P. Wriggers*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Hydromechanik</b>	
1.1	Eigenschaften einer Flüssigkeit .....	3
1.2	Hydrostatik.....	5
1.2.1	Druck in einer ruhenden Flüssigkeit .....	5
1.2.2	Auftrieb .....	13
1.2.3	Der schwimmende Körper .....	18
1.2.4	Druckkräfte auf ebene Flächen.....	21
1.2.5	Druckkräfte auf gekrümmte Flächen .....	28
1.3	Hydrodynamik .....	33
1.3.1	Kinematische Grundlagen .....	33
1.3.2	Stromfadentheorie .....	36
1.3.3	Strömung mit Energieverlusten .....	55
1.4	Weiterführende Literatur .....	68
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Elastizitätstheorie</b>	
2.1	Spannungszustand .....	71
2.1.1	Spannungsvektor, Spannungstensor, Indexschreibweise..	71
2.1.2	Koordinatentransformation.....	76
2.1.3	Hauptspannungen, Invarianten, Mohrsche Kreise.....	79
2.1.4	Hydrostatischer Spannungszustand, Deviator .....	85
2.1.5	Gleichgewichtsbedingungen .....	87
2.2	Deformation und Verzerrung .....	92
2.2.1	Allgemeines .....	92
2.2.2	Infinitesimaler Verzerrungstensor .....	94
2.2.3	Kompatibilitätsbedingungen .....	99
2.3	Elastizitätsgesetz.....	102
2.3.1	Hookesches Gesetz .....	102
2.3.2	Isotropie .....	104
2.3.3	Formänderungsenergiegedichte.....	107
2.3.4	Temperaturdehnungen .....	111
2.4	Grundgleichungen .....	113
2.5	Ebene Probleme.....	115
2.5.1	Ebener Spannungszustand, ebener Verzerrungszustand .	115
2.5.2	Spannungs-Differentialgleichungen, Spannungsfunktion.	118
2.5.3	Anwendungsbeispiele .....	121

2.5.4	Verschiebungs-Dgln., Rotationssymmetrie .....	127
2.6	Torsion .....	130
2.6.1	Allgemeines .....	130
2.6.2	Grundgleichungen .....	130
2.6.3	Verwölbungsfunktion und Torsionsfunktion .....	132
2.7	Energieprinzipien .....	141
2.7.1	Arbeitssatz .....	142
2.7.2	Sätze von Clapeyron und von Betti .....	146
2.7.3	Prinzip der virtuellen Verrückungen .....	147
2.8	Weiterführende Literatur .....	153
<b>3</b>	<b>Statik spezieller Tragwerke</b>	
3.1	Einleitung.....	157
3.2	Der Bogenträger .....	158
3.2.1	Gleichgewichtsbedingungen .....	158
3.2.2	Der momentenfreie Bogenträger .....	162
3.3	Das Seil .....	164
3.3.1	Gleichung der Seillinie.....	164
3.3.2	Seil unter Einzelkräften .....	168
3.3.3	Kettenlinie.....	169
3.4	Der Schubfeldträger .....	172
3.4.1	Kraftfluss am Parallelträger.....	172
3.4.2	Grundgleichungen .....	173
3.5	Saite und Membran .....	181
3.5.1	Die Saite.....	181
3.5.2	Die Membran .....	185
3.5.3	Membrantheorie dünner Rotationsschalen .....	187
3.6	Die Platte .....	192
3.6.1	Grundgleichungen der Platte .....	192
3.6.2	Randbedingungen für die schubstarre Platte .....	199
3.6.3	Die Kreisplatte .....	204
3.7	Weiterführende Literatur .....	208
<b>4</b>	<b>Schwingungen kontinuierlicher Systeme</b>	
4.1	Einleitung.....	211
4.2	Die Saite.....	212
4.2.1	Wellengleichung .....	212



4.2.2	d'Alembertsche Lösung, Wellen .....	214
4.2.3	Bernoullische Lösung, Schwingungen .....	218
4.3	Longitudinalschwingungen und Torsionsschwingungen ..	224
4.3.1	Freie Longitudinalschwingungen .....	224
4.3.2	Erzwungene Longitudinalschwingungen .....	230
4.3.3	Torsionsschwingungen.....	233
4.4	Biegeschwingungen von Balken .....	235
4.4.1	Grundgleichungen .....	235
4.4.2	Freie Schwingungen .....	238
4.4.3	Erzwungene Schwingungen .....	247
4.4.4	Wellenausbreitung .....	251
4.5	Eigenschwingungen von Membranen und Platten .....	254
4.5.1	Membranschwingungen .....	254
4.5.2	Plattenschwingungen.....	258
4.6	Energieprinzipien .....	261
4.7	Weiterführende Literatur .....	268
<b>5</b>	<b>Stabilität elastischer Strukturen</b>	
5.1	Allgemeines .....	271
5.2	Beschreibung typischer Stabilitätsfälle .....	272
5.2.1	Der elastisch eingespannte Druckstab als Beispiel für ein Verzweigungsproblem .....	272
5.2.2	Der Einfluss von Imperfektionen .....	278
5.2.3	Ein Beispiel für ein Durchschlagproblem .....	283
5.3	Verallgemeinerung .....	285
5.4	Stabknicken .....	290
5.4.1	Der elastische Druckstab mit großen Verschiebungen – Die Elastica .....	290
5.4.2	Ermittlung der Knickgleichung mit der Energiemethode	295
5.4.3	Der imperfekte Druckstab.....	299
5.5	Plattenbeulen .....	302
5.5.1	Die Beugleichung.....	302
5.5.2	Die Rechteckplatte unter einseitigem Druck.....	305
5.5.3	Die Kreisplatte .....	311
5.6	Weiterführende Literatur .....	314

<b>6</b>	<b>Viskoelastizität und Plastizität</b>	
6.1	Einführung .....	317
6.2	Viskoelastizität .....	320
6.2.1	Modellrheologie .....	321
6.2.2	Materialgesetz in integraler Form .....	340
6.3	Plastizität .....	344
6.3.1	Allgemeines .....	344
6.3.2	Fachwerke .....	351
6.3.3	Balken .....	358
6.4	Weiterführende Literatur .....	368
<b>7</b>	<b>Numerische Methoden in der Mechanik</b>	
7.1	Einleitung .....	371
7.2	Differentialgleichungen in der Mechanik .....	371
7.3	Integrationsverfahren für Anfangswertprobleme .....	374
7.3.1	Explizite Integrationsverfahren .....	374
7.3.2	Implizite Integrationsverfahren .....	383
7.4	Differenzenverfahren für Randwertprobleme .....	387
7.4.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen .....	387
7.4.2	Partielle Differentialgleichungen .....	393
7.5	Methode der gewichteten Residuen .....	398
7.5.1	Vorbemerkungen .....	398
7.5.2	Kollokationsverfahren .....	399
7.5.3	Galerkin-Verfahren .....	399
7.5.4	Numerische Integration .....	402
7.5.5	Beispiele .....	404
7.5.6	Verfahren von Ritz .....	410
7.6	Methode der finiten Elemente .....	419
7.6.1	Einführung .....	419
7.6.2	Aufstellung der Gleichungssysteme .....	423
7.6.3	Stabelement .....	426
7.6.4	Balkenelement .....	429
7.6.5	Element für die Kreisplatte .....	435
7.6.6	Finite Elemente für zweidimensionale Probleme .....	438
7.7	Weiterführende Literatur .....	455

**Englische Fachausdrücke** ..... 457

**Sachverzeichnis** ..... 475