

# Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold, B. Eckmann and F. Takens

1415

---

M. Langevin M. Waldschmidt (Eds.)

## Cinquante Ans de Polynômes Fifty Years of Polynomials

Proceedings of a Conference  
held in honour of Alain Durand  
at the Institut Henri Poincaré  
Paris, France, May 26–27, 1988

---



Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo Hong Kong

**Editors**

Michel Langevin

Michel Waldschmidt

U. A. 763 du C. N. R. S. Problèmes Diophantiens

Institut Henri Poincaré

11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Mathematics Subject Classification (1980): 11C08, 11J81–82–83–85,  
12D05–10–99, 12E05–10–12, 26C05–10–15, 26D05, 30C10–15, 30D15,  
32E99, 32F99, 65H05–10

ISBN 3-540-52190-9 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

ISBN 0-387-52190-9 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, re-use of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in other ways, and storage in data banks. Duplication of this publication or parts thereof is only permitted under the provisions of the German Copyright Law of September 9, 1965, in its version of June 24, 1985, and a copyright fee must always be paid. Violations fall under the prosecution act of the German Copyright Law.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1990

Printed in Germany

Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr.

2146/3140-543210 – Printed on acid-free paper



Alain Durand est né le 16 Avril 1949. Après des études universitaires à l'Université Paris Nord puis à l'Université Paris VII, il obtient son Diplôme d'Etudes Approfondies en 1973 avec les unités "Nombres Transcendants" et "Analyse  $p$ -adique". Sa thèse de troisième cycle "Quatre problèmes de Mahler" est soutenue le 26 Juin 1974.

Ses recherches de critères de transcendance et d'indépendance algébrique, ainsi que ses travaux sur la classification des nombres transcendants, l'amènent à entreprendre une étude approfondie et systématique des propriétés arithmétiques des polynômes.

Il commence sa carrière universitaire comme Assistant à l'Université de Limoges le 1er Octobre 1974. Il est titularisé Maître-Assistant un an après. Il n'interrompt ses cours que l'année de son service militaire en 1976-77.

Alain Durand était un enseignant très apprécié des étudiants. Ses cours comme ses exposés de recherche étaient préparés avec beaucoup de soin, dénotant une grande honnêteté intellectuelle et une extrême soif de perfection.

Son décès le 23 Octobre 1986 a profondément attristé tous ceux qui le connaissaient.

Jean-Louis Nicolas, Michel Waldschmidt.

## TRAVAUX D'ALAIN DURAND

### I-Travaux publiés non reproduits dans ce volume

Un critère de transcendance, Séminaire Delange-Pisot-Poitou (Groupe d'Etude) 1973/74, n°G11, Paris (I.H.P.), 9p.

Quatre problèmes de Mahler sur la fonction ordre d'un nombre transcendant, Bull. Soc. Math. France, 102, 1974, p.365-377 .

Un système de nombres algébriquement indépendants, C.R.Acad.Sc. Paris (sér.A), 280, 1975, p. 309-311.

Fonction  $\theta$ -ordre et classification de  $\mathbb{C}^D$ , C.R.Acad.Sc. Paris (sér.A), 280, 1975, p.1085-1088

Note on rational approximations of the exponential function at rational points, Bull. Austral. Math. Soc., 14, 1976, p.449-455.

Indépendance algébrique de nombres complexes et critère de transcendance, Compositio Math., 35, 1977, p.259-267

Approximations algébriques d'un nombre transcendant, C.R.Acad.Sc. Paris (sér.A), 287, 1978, p.595-597.

Simultaneous diophantine approximations and Hermite's method, Bull. Austral. Math. Soc. 21, 1980, p. 463-470.

A propos d'un théorème de Bernstein sur la dérivée d'un polynôme, C.R.Acad.Sc. Paris, (sér.A), 290, 1980, p.523-525.

### II-Travaux reproduits dans ce volume

Quelques aspects de la théorie analytique des polynômes (2 chapitres, 80 p.)

Relation de Szegő sur la dérivée d'un polynôme (Journées de Th. élem. et anal. des Nombres, Orsay, 5/1980).

Approximations algébriques d'un nombre transcendant, (Journées de Th. élem. et anal. des Nombres, Caen, 9/1980).

## PREFACE

Ces Actes portent un double titre: " Cinquante Ans de Polynômes " et " Hommage à Alain Durand " . On va expliquer cette double appellation et ce qui fait la réelle unité des travaux réunis dans ce volume.

Alain Durand, en suivant un itinéraire dont nous parlerons plus loin, préparait depuis le début des années 1980 un travail de synthèse sur la "théorie analytique des polynômes". Sa disparition ne nous prive que partiellement de cet ouvrage dont une part importante était déjà prête. Elle est reproduite dans ce volume avec le texte des exposés du Colloque, tous relatifs à des problèmes actuels se posant en termes de polynômes.

Quels polynômes ? Les polynômes en question dans ce Lecture Notes sont, le plus souvent, des polynômes d'une variable complexe. Il s'agit donc d'objets mathématiques peu mystérieux, du moins tant qu'on n'est pas à la recherche de résultats particuliers. La difficulté est là: les grands théorèmes généraux sont connus et la liste en est courte et complète, les résultats particuliers sont techniques et partiels; de plus, la preuve de ces derniers est assez souvent détournée et astucieuse même si elle n'utilise que des arguments classiques. Dans ce domaine, la littérature est celle qu'on peut attendre dans ce genre de situation: une foule de résultats à la fois fins, élémentaires (parfois), partiels (souvent), dont les auteurs s'ignorent entre eux assez fréquemment. La nécessité d'une synthèse s'impose donc périodiquement, d'autant qu'un même résultat peut revêtir des aspects variés comme on le verra plus loin.

Les synthèses Deux ouvrages majeurs de références ont déjà été publiés. Le premier, "la théorie analytique des polynômes d'une variable (à coefficients quelconques)" de J. Dieudonné a 50 ans. Le second, "Geometry of polynomials" de M. Marden est de 1966 mais est une actualisation d'un ouvrage de 1949 intitulé "The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable" (il prend ainsi en compte un important "survey" de W. Specht de 1958). La nécessité d'une synthèse récente est donc claire. Celle d'Alain Durand ne suit pas les plans de ses devanciers; il se place dans le point de vue de l'Analyse des années 1980 et reconstruit dans cette optique l'architecture de la théorie, montrant les différentes articulations entre les résultats, lesquels se trouvent souvent ainsi ou améliorés, ou généralisés, ou réduits à des corollaires immédiats.

Les auteurs précédents distinguaient deux types de théorie suivant la nature des arguments utilisés dans les preuves, l'une "analytique" et l'autre "géométrique". L'imbrication profonde de ces deux types de résultats fait d'ailleurs que J. Dieudonné (resp. M. Marden) n'a retenu que l'expression "théorie analytique" (resp. "geometry") dans son titre. Alain Durand n'utilise lui que des arguments analytiques (parfois assez sophistiqués) et laisse ainsi de côté certaines formes de résultats; mais ces derniers sont toutefois évoqués dans un autre exposé de ce volume.

Terminons cet alinéa par un exemple facile illustrant cette nécessité d'une synthèse et l'aspect varié que peuvent revêtir des résultats très classiques :

Soit  $P(z) = a_0 z^d + \dots + a_d = a_0 (z-x_1) \dots (z-x_d)$  un polynôme à coefficients complexes. L'inégalité :

$$M(P) = |a_0| \sup(1, |x_1|) \dots \sup(1, |x_d|) \leq L_2(P) = (|a_0|^2 + \dots + |a_d|^2)^{1/2}$$

entre coefficients et racines est apparue -au moins implicitement- au début de ce siècle dans un travail de Landau. Il s'agit en fait d'un corollaire de l'inégalité de Hölder, en effet, le membre de gauche (la mesure de Mahler de  $P$ ) est la moyenne géométrique  $L_0(P)$  des valeurs prises par  $|P(z)|$  sur le cercle-unité (appliquer la formule de Jensen) tandis que celui de droite représente la moyenne quadratique de la même fonction (appliquer le théorème de Parseval). Malgré la simplicité de ces arguments, on peut faire mieux et plus simple en établissant l'inégalité :

$$M(P)^2 + (|a_0 a_d| / M(P))^2 \leq (L_2(P))^2 .$$

Il suffit de faire la démonstration pour un polynôme unitaire. Soit  $Q(z)$  le polynôme produit des  $(z-x_i)$  lorsque  $|x_i| \leq 1$  et des  $(1-\bar{x}_i z)$  lorsque  $|x_i| > 1$ . Le coefficient directeur (resp. constant) de  $Q(z)$  est de module  $M(P)$  (resp.  $|a_d| / M(P)$ ) et il suffit de minorer  $(L_2(Q))^2 = (L_2(P))^2$  (puisque  $|P(z)| = |Q(z)|$  quand  $|z|=1$ ) par la somme des carrés des termes directeur et constant de  $Q$  pour conclure. En résumé, cette inégalité, bien que non évidente, peut être qualifiée de facile; elle a pourtant donné lieu à une série de travaux (dus à Specht, Vicente Gonçalves, Ky Fan, Mignotte ainsi qu'indirectement à d'autres auteurs) avec d'autres démonstrations plus ou moins éloignées de celles qu'on vient d'évoquer.

Les utilisateurs et l'itinéraire d'Alain Durand Il est commode de distinguer deux époques dans l'histoire de cette théorie :

-la première couvre le XIX<sup>e</sup> et le début du XX<sup>e</sup> siècle; au cours de celle-ci, les polynômes ont fait l'objet d'études systématiques à l'aide des concepts apportés par la théorie des fonctions d'une variable complexe

-la seconde couvre grosso modo les cinquante dernières années; au cours de cette période, les recherches systématiques se sont poursuivies mais ont été de plus en plus consacrées à des situations spécifiques. Ces dernières correspondent souvent à des questions formulées dans d'autres domaines de sorte qu'on a vu évoluer la situation ainsi: les utilisateurs des résultats de la théorie (analytique ou géométrique) des polynômes sont devenus les auteurs.

Les domaines de recherche où sont utilisés des "lemmes polynomiaux" sont des plus variés: théorie des nombres (et, en particulier, théorie des nombres transcendants), analyse, théorie du potentiel, mécanique statistique, thermodynamique, informatique... Alain Durand a suivi la démarche qu'on vient de décrire. Il est venu à l'étude systématique des polynômes après avoir utilisé de nombreux "lemmes polynomiaux" dans l'étude des "mesures de transcendance". Plus généralement, la théorie des nombres transcendants fait appel à des constructions de fonctions polynomiales non triviales qu'on minore par des arguments arithmétiques et qu'on majore par des arguments analytiques. A la fin des années 1970, des travaux sur ces derniers (les lemmes de Schwarz

en plusieurs variables) ont utilisé des résultats de D.Masser et J.C.Moreau basés sur une inégalité de Bernstein. Ces travaux, qui ont permis à M.Waldschmidt d'obtenir une nouvelle démonstration du théorème de Baker (cf. Astérisque 69/70), ont aussi amené, avec J.C.Moreau, Alain Durand et d'autres membres de l'équipe des Problèmes Diophantiens à étudier et améliorer divers raffinements de cette inégalité.

Le contenu de ces Actes Après avoir parlé du travail d'Alain Durand, on dit quelques mots des exposés de ce Colloque. Les problèmes évoqués dans ce volume se rattachent -en termes de polynômes- presque tous à la Théorie des Nombres, ce qui est naturel puisque cette théorie est, pour les auteurs, la motivation première comme on l'a expliqué ci-dessus. Si les exposés de P.Bundschuh et M.Waldschmidt sont relatifs à des problèmes de la théorie des nombres transcendants qu'avait abordés Alain Durand, d'autres exposés sont moins directement reliés à cette théorie; citons ceux de F.Gramain (fonctions entières arithmétiques), R.Louboutin (problème de Lehmer), M.Mignotte (lemme de Siegel), P.Philippon (polynômes d'interpolation) pour les plus proches et ceux de B.Saffari (comparaison de normes pour les polynômes à coefficients  $\pm 1$ ), A.Schinzel (critère d'irréductibilité), C.Smyth (problème de Tarry-Escott, en collaboration avec E.Rees) pour les voisins un peu plus éloignés; une mention particulière doit être faite pour les exposés "hors théorie des nombres" de M.Langevin (géométrie des polynômes), J.P.Borel (construction d'un multiple à coefficients positifs d'un polynôme), et J.L.Nicolas (avec A.Schinzel) (étude de polynômes particuliers apparaissant en théorie du signal) et notamment pour ces deux derniers qui illustrent pleinement la variété et la précision des techniques à mettre en oeuvre pour la résolution de problèmes concrets s'exprimant en termes de polynômes.

En conclusion, les éditeurs désireraient remercier tous ceux qui ont favorisé la tenue de ce Colloque et ont ainsi permis de rendre à Alain Durand cet hommage:

- les membres du Comité d'Organisation et d'abord son Président: Monsieur J.Dieudonné
- l'Institut Henri Poincaré où s'est tenu ce Colloque et Madame H.Nocton tout particulièrement
- les Universités de Limoges, Metz et Saint-Etienne
- la direction M.P.B. du C.N.R.S. pour son aide exceptionnelle en faveur de ce Colloque.

Michel Langevin

TABLE DES MATIERES

Notice biographique, travaux d'Alain Durand, préface .....	III
<u>A.Durand</u> Quelques aspects de la théorie analytique des polynômes (I) .....	1
<u>A.Durand</u> Quelques aspects de la théorie analytique des polynômes (II) .....	43
<u>A.Durand</u> Relation de Szegő sur la dérivée d'un polynôme .....	86
<u>A.Durand</u> Approximations algébriques d'un nombre transcendant .....	94
<u>JP.Borel</u> Polynômes à coefficients positifs multiples d'un polynôme donné .....	97
<u>P.Bundschuh</u> Indépendance algébrique par des méthodes d'approximations .....	116
<u>F.Gramain</u> Fonctions entières d'une ou plusieurs variables complexes prenant des valeurs entières sur une progression géométrique .....	123
<u>M.Langevin</u> Sphère de Riemann et Géométrie des polynômes .....	138
<u>M.Migrotte</u> Polynômes et lemme de Siegel .....	160
<u>J.L.Nicolas et A.Schinzel</u> Localisation des zéros de polynômes intervenant en théo- rie du signal .....	167
<u>P.Philippon</u> Polynômes d'interpolation sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}[i]$ .....	180
<u>E.Rees et C.Smyth</u> On the constant in the Tarry-Escott problem .....	196
<u>B.Saffari</u> Extremal problems on polynomials .....	209
<u>A.Schinzel</u> Un critère d'irréductibilité de polynômes .....	212
<u>M.Waldschmidt</u> Indépendance algébrique de nombres de Liouville .....	225

L'exposé de R.Louboutin: "Le problème de Lehmer, où en est-on?" fera l'objet d'une publication ultérieure