Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

325

Chin-Cheng Chou

Centre Universitaire de Perpignan, Perpignan/France

La Transformation de Fourier Complexe et L'Equation de Convolution

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1973

AMS Subject Classifications (1970): 42A96, 46F15, 32A25, 35R15

ISBN 3-540-06301-3 Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York
ISBN 0-387-06301-3 Springer- Verlag New York · Heidelberg · Berlin

Offsetdruck: Julius Beltz, Hemsbach/Bergstr.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Le présent travail s'inspire des travaux de MM. Ehrenpreis et Hörmander sur les équations de convolution (cf. [10], [11], [17]). Nous allons étendre leurs résultats au cas des ultradistributions construites sur une classe des fonctions indéfiniment différentiables non quasi-analytiques (cf. [32], [33]). D'une manière précise, nous étudions le problème d'existence et la régularité d'une solution d'une équation de convolution définie par une ultradistribution à support compact S : soit l'équation

$$S * U = T$$

où U est l'inconnue à prendre dans un certain espace fonctionnel et où T est une donnée, possédant parfois certaines régularités.

Nous commençons, dans le chapitre I , à rappeler la définition et les propriétés dont nous avons besoin dans la suite, des espaces fonctionnels $\mathcal{D}(M_{(p)})$ et leurs duaux topologiques $\mathcal{D}'(M_{(p)})$ qu'on appelle espaces d'ultradistributions (cf. [31], [32] et [33]), nous remarquons ([31]), en particulier, que $\mathcal{D}(M_{(p)})$ est du type Dual de Fréchet-Schwartz et que $\mathcal{D}'(M_{(p)})$ est du type de Fréchet-Schwartz. On dispose alors d'une théorie achevée de la dualité (cf. [15]). On en déduit ainsi que pour que l'application $T \longmapsto S * T$ de $\mathcal{D}'(M_{(p)}, \Omega_1)$ dans $\mathcal{D}'(M_{(p)}, \Omega_2)$ soit surjective il faut et il suffit que le couple d'ouverts (Ω_1 , Ω_2) soit S-convexe (et non pas S-fortement convexe [17] comme dans le cas des distributions) et que la transformation de Fourier de S vérifie certaines conditions de lenteur dans sa décroissance à l'infini. Nous montrerons encore que $\mathcal{D}'(M_{(p)}, \mathbb{R}^n)$ est un espace analytiquement uniforme [12], ce qui permet de résoudre de nouveau l'équation de convolution avec la procédure directe [10].

Au chapître II , nous avons regroupé quelques résultats sur le module minimum des fonctions holomorphes que nécessitent nos études.

C'est à partir du chapitre III que nous abordons le problème proprement dit : l'inversibilité et la régularité des solutions d'une équation de convolution. Nous caractérisons les ultradistributions S à support compact qui sont $\mathcal{D}'(M_{(p)})$-inversibles, i.e $S^*(\mathcal{D}'(M_{(p)})) = \mathcal{D}'(M_{(p)})$. Nous retrouvons, en particulier, un résultat de M. Schapira [31] , résultat également prouvé par M. Björck [2] , lorsque S^* est un opérateur différentiel. Nous construisons en particulier une fonction $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, qui est inversible à notre sens et utilisant les opérateurs différentiels d'ordre infini, nous avons pu généraliser le résultat $\mathcal{D} * \mathcal{E} = \mathcal{E}$ dû à M. Ehrenpreis [12] , au cas où $\mathcal{E}$ est l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ indéfiniment différentiables à valeur dans un Frechet.
A l'aide d'un théorème de type Paley-Wiener sur les fonctionnelles définies sur une classe de fonctions quasi-analytique de M.Neymark [30] , notre méthode permet de retrouver un théorème de M. Martineau [27] , i.e. l'application $T \longmapsto S * T$ applique l'espace $\mathcal{E}_0(P!^{\alpha})$ des fonctions entières d'ordre $\frac{1}{1-\alpha} > 1$ surjectivement sur lui-même pour tout $S \in [\mathcal{E}_0(P!)^{\alpha}]'$.

Nous montrons également que le phénomène de propagation de la régularité d'une solution d'une équation différentielle mis en évidence par F.John et B.Malgrange [23] existe aussi pour des opérateurs $\mathcal{D}'(M_{(p)})$-inversibles.

Dans le chapitre IV , nous étudions le problème de régularité et nous caractérisons les opérateurs possédant l'une des propriétés suivantes :
Toute $T \in \mathcal{D}'(M_{(p)})$ telle que $S * T \in \mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{E}(M_{(p)})$ et $\mathcal{E}$, fonctions indéfiniment différentiables sans condition de croissances) est dans $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{E}(M_{(p)})$ et $\mathcal{E}$) nous disons qu'il est alors elliptique analytique (resp. $M_{(p)}$-hypoelliptique et faiblement $M_{(p)}$-hypoelliptique). Nous montrons que, pour qu'un opérateur de convolution soit faiblement $M_{(p)}$-hypoelliptique pour toutes les classes $M_{(p)}$, il faut et il suffit qu'il soit elliptique analytique. Dans le cas où S est un opérateur différentiel aux dérivées partielles, des résultats similaires sont également

donnés par M. Björck (cf.[2]). Notons qu'il existe des opérateurs de convolution elliptique analytique (à notre sens) qui ne sont pas des translatés des opérateurs différentiels aux dérivées partielles. (cf. La remarque qui suit le n° 2 du chapitre IV. § 3).

Enfin, dans le chapitre V, nous caractérisons des opérateurs hyperboliques, i.e. des opérateurs possédant une solution élémentaire dont le support est contenu dans un cône convexe ne contenant aucune droite. Et nous posons un "problème de Cauchy" pour un tel opérateur.

Un certain nombre de nos résultats, ont été annoncés dans des notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [7] , [8] , [9] .

Nous avons très douloureusement ressenti la disparition brutale de Monsieur André MARTINEAU, de qui nous avons tant appris, aussi bien en mathématiques que dans la vie pratique.

Nous remercions MM. Malliavin, Houzel, Boutet de Monvel de vouloir s'intéresser à notre travail.