

# Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars

Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

325

---

Chin-Cheng Chou

Centre Universitaire de Perpignan, Perpignan/France

La Transformation  
de Fourier Complexe  
et L'Equation de Convolution

---



Springer-Verlag

Berlin · Heidelberg · New York 1973

---

AMS Subject Classifications (1970): 42A 96, 46F 15, 32A 25, 35R 15

---

ISBN 3-540-06301-3 Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York  
ISBN 0-387-06301-3 Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks.

Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1973. Library of Congress Catalog Card Number 73-79975. Printed in Germany.

Offsetdruck: Julius Beltz, Hemsbach/Bergstr.

TABLE DES MATIERES

Chapitre I.

Les espaces des $M_{(p)}$ -ultradistributions . . . . .	1
§ 1. Les espaces $\mathcal{D}(M_{(p)}, \Omega)$ , $\mathcal{E}(M_{(p)}, \Omega)$ et $\mathcal{E}_0(M_{(p)}, \Omega)$ et leurs duaux. . . . .	1
1. Définitions et notations. . . . .	1
2. Les espaces des ultradistributions. . . . .	8
§ 2. Quelques propriétés algébriques et topologiques. . . . .	11
1. Relation entre les espaces $\mathcal{E}_0(Q_{(p)})$ et $\mathcal{E}(R_{(p)})$ . . . . .	11
2. Sur l'intersection des espaces $\mathcal{E}(M_{(p)})$ . . . . .	20
3. La structure topologique des $\mathcal{D}(M_{(p)}, \Omega)$ . . . . .	26
4. Les théorèmes de Paley-Wiener . . . . .	37
5. La formule de Leibniz-Hörmander généralisée . . . . .	42

Chapitre II.

Sur le module minimal des fonctions analytiques complexes . . . . .	46
1. Le théorème de division de Hörmander. . . . .	46
2. Théorème du module minimum de type de Cartan- Caratheodory. . . . .	48
3. Module minimum des fonctions entières d'ordre presque inférieur à un. . . . .	53

Chapitre III.

L'inversibilité . . . . .	60
§ 1. Opérateur de convolutions $\mathcal{D}'(M_{(p)})$ -inversible. . . . .	60
1. La convolution et les suites $M_{(p)}$ -adaptées. . . . .	60
2. Caractérisation des opérateurs $\mathcal{D}'(M_{(p)})$ inversible (condtions suffisantes). . . . .	66

3. Caractérisation des opérateurs $\mathcal{D}'(M_{(p)})$ inversibles (suite) . . . . .	72
4. Conditions nécessaires. . . . .	75
§ 2. Exemples d'opérateurs $\mathcal{D}'(M_{(p)})$ -inversibles . . . . .	79
1. Les opérateurs différentiels d'ordre infini . . . . .	79
2. Inversibilité des opérateurs hypoelliptiques. . . . .	82
3. Construction d'une fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ inversible dans $\mathcal{D}'(M_{(p)})$ . . . . .	83
4. Construction d'une distribution non inversible. . . . .	88
§ 3. La convolution et le support singulier . . . . .	90
1. La convolution et le support singulier. . . . .	90
2. Phénomène de la propagation de la régularité. . . . .	95
§ 4. Existence des solutions d'une équation de convolution dans une classe de fonctions quasi-analytiques . . . . .	98

#### Chapitre IV.

La régularité intérieure . . . . .	101
§ 1. Position du problème . . . . .	101
§ 2. Les $M_{(p)}$ hypoellipticité . . . . .	101
1. Caractérisation . . . . .	101
2. Le support $M_{(p)}$ -singulier de la solution élémentaire d'un opérateur faiblement $M_{(p)}$ -hypoelliptique . . . . .	111
§ 3. Opérateur elliptique analytique et la régularité uni- verselle . . . . .	112
1. Opérateur elliptique-analytique . . . . .	112
2. La régularité universelle . . . . .	114
3. Une caractérisation des fonctions analytiques réelles . . . . .	116

#### Chapitre V.

Opérateur hyperbolique . . . . .	120
§ 1. Les opérateurs hyperboliques . . . . .	120

1. Définition . . . . .	120
2. Caractérisation. . . . .	120
§ 2. Problème de Cauchy. . . . .	130
1. Problème d'existence . . . . .	130
2. Problème d'unicité . . . . .	132
Bibliographie . . . . .	135

## INTRODUCTION

Le présent travail s'inspire des travaux de MM. Ehrenpreis et Hörmander sur les équations de convolution (cf. [10], [11], [17]). Nous allons étendre leurs résultats au cas des ultradistributions construites sur une classe des fonctions indéfiniment différentiables non quasi-analytiques (cf. [32], [33]). D'une manière précise, nous étudions le problème d'existence et la régularité d'une solution d'une équation de convolution définie par une ultradistribution à support compact  $S$  : soit l'équation

$$S * U = T$$

où  $U$  est l'inconnue à prendre dans un certain espace fonctionnel et où  $T$  est une donnée, possédant parfois certaines régularités.

Nous commençons, dans le chapitre I, à rappeler la définition et les propriétés dont nous avons besoin dans la suite, des espaces fonctionnels  $\mathcal{D}(M_{(p)})$  et leurs duaux topologiques  $\mathcal{D}'(M_{(p)})$  qu'on appelle espaces d'ultradistributions (cf. [31], [32] et [33]), nous remarquons ([31]), en particulier, que  $\mathcal{D}(M_{(p)})$  est du type Dual de Fréchet-Schwartz et que  $\mathcal{D}'(M_{(p)})$  est du type de Fréchet-Schwartz. On dispose alors d'une théorie achevée de la dualité (cf. [15]). On en déduit ainsi que pour que l'application  $T \longmapsto S * T$  de  $\mathcal{D}'(M_{(p)}, \Omega_1)$  dans  $\mathcal{D}'(M_{(p)}, \Omega_2)$  soit surjective il faut et il suffit que le couple d'ouverts  $(\Omega_1, \Omega_2)$  soit  $S$ -convexe (et non pas  $S$ -fortement convexe [17] comme dans le cas des distributions) et que la transformation de Fourier de  $S$  vérifie certaines conditions de lenteur dans sa décroissance à l'infini. Nous montrerons encore que  $\mathcal{D}'(M_{(p)}, \mathbb{R}^n)$  est un espace analytiquement uniforme [12], ce qui permet de résoudre de nouveau l'équation de convolution avec la procédure directe [10].

Au chapitre II, nous avons regroupé quelques résultats sur le module minimum des fonctions holomorphes que nécessitent nos études.

C'est à partir du chapitre III que nous abordons le problème proprement dit : l'inversibilité et la régularité des solutions d'une équation de convolution. Nous caractérisons les ultradistributions  $S$  à support compact qui sont  $\mathcal{D}'(M_{(p)})$ -inversibles, i.e.  $S^* (\mathcal{D}'(M_{(p)})) = \mathcal{D}'(M_{(p)})$ . Nous retrouvons, en particulier, un résultat de M. Schapira [31], résultat également prouvé par M. Björck [2], lorsque  $S^*$  est un opérateur différentiel. Nous construisons en particulier une fonction  $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , qui est inversible à notre sens et utilisant les opérateurs différentiels d'ordre infini, nous avons pu généraliser le résultat  $\mathcal{D} * \mathcal{E} = \mathcal{E}$  dû à M. Ehrenpreis [12], au cas où  $\mathcal{E}$  est l'espace des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^n$  indéfiniment différentiables à valeur dans un Frechet.

A l'aide d'un théorème de type Paley-Wiener sur les fonctionnelles définies sur une classe de fonctions quasi-analytique de M. Neymark [30], notre méthode permet de retrouver un théorème de M. Martineau [27], i.e. l'application  $T \longmapsto S * T$  applique l'espace  $\mathcal{E}_0(P!^\alpha)$  des fonctions entières d'ordre  $\frac{1}{1-\alpha} > 1$  surjectivement sur lui-même pour tout  $S \in \{\mathcal{E}_0(P!^\alpha)\}'$ .

Nous montrons également que le phénomène de propagation de la régularité d'une solution d'une équation différentielle mis en évidence par F. John et B. Malgrange [23] existe aussi pour des opérateurs  $\mathcal{D}'(M_{(p)})$ -inversibles.

Dans le chapitre IV, nous étudions le problème de régularité et nous caractérisons les opérateurs possédant l'une des propriétés suivantes :

Toute  $T \in \mathcal{D}'(M_{(p)})$  telle que  $S * T \in \mathcal{Q}$  (resp.  $\mathcal{E}(M_{(p)})$ ) et  $\mathcal{E}$ , fonctions indéfiniment différentiables sans condition de croissances) est dans  $\mathcal{Q}$  (resp.  $\mathcal{E}(M_{(p)})$ ) et  $\mathcal{E}$ ) nous disons qu'il est alors elliptique analytique (resp.  $M_{(p)}$ -hypoelliptique et faiblement  $M_{(p)}$ -hypoelliptique). Nous montrons que, pour qu'un opérateur de convolution soit faiblement  $M_{(p)}$ -hypoelliptique pour toutes les classes  $M_{(p)}$ , il faut et il suffit qu'il soit elliptique analytique. Dans le cas où  $S$  est un opérateur différentiel aux dérivées partielles, des résultats similaires sont également

## IX

donnés par M. Björck (cf.[2]). Notons qu'il existe des opérateurs de convolution elliptique analytique (à notre sens) qui ne sont pas des translatés des opérateurs différentiels aux dérivées partielles. (cf. La remarque qui suit le n° 2 du chapitre IV. § 3).

Enfin, dans le chapitre V, nous caractérisons des opérateurs hyperboliques, i.e. des opérateurs possédant une solution élémentaire dont le support est contenu dans un cône convexe ne contenant aucune droite. Et nous posons un "problème de Cauchy" pour un tel opérateur.

Un certain nombre de nos résultats, ont été annoncés dans des notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [7], [8], [9].

Nous avons très douloureusement ressenti la disparition brutale de Monsieur André MARTINEAU, de qui nous avons tant appris, aussi bien en mathématiques que dans la vie pratique.

Nous remercions MM. Malliavin, Houzel, Boutet de Monvel de vouloir s'intéresser à notre travail.