Mathematik für das Lehramt

Mathematik für das Lehramt
K. Reiss/G. Schmieder†: Basiswissen Zahlentheorie
A. Büchter/H.-W. Henn: Elementare Stochastik

Herausgeber: Prof. Dr. Kristina Reiss, Prof. Dr. Rudolf Scharlau,
Prof. Dr. Thomas Sonar, Prof. Dr. Hans-Georg Weigand

Kristina Reiss   Gerald Schmieder

Basiswissen Zahlentheorie

Eine Einführung in Zahlen und Zahlbereiche

Zweite Auflage

Mit 43 Abbildungen

Springer

Prof. Dr. Kristina Reiss
Mathematisches Institut
Ludwig-Maximilians-Universität
Theresienstraße 39
80333 München
E-mail: kristina.reiss@math.lmu.de

Prof. Dr. Gerald Schmieder†

Die Abbildung auf dem Einband wurde dem Buch „Wege zur Analysis“ von Herbert Schröder, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2001, mit freundlicher Genehmigung des Autors entnommen.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 11Axx, 11-01

ISBN 978-3-540-45377-2 Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN 978-3-540-21248-5 1. Aufl. Springer Berlin Heidelberg New York

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media

springer.de

Satz und Herstellung: LE-TEX Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig
Einbandgestaltung: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier 175/3100YL - 5 4 3 2 1 0

Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften, und die Zahlentheorie ist die Königin der Mathematik.

Carl Friedrich Gauß

Vorwort zur zweiten Auflage

Es sind nur wenige Änderungen, die sich zwischen der ersten und der zweiten Auflage ergeben haben. So wurden Fehler korrigiert, wobei hoffentlich nicht allzu viele neue hinzu gekommen sind. Darüber hinaus sind an einigen Stellen Ergänzungen und Präzisierungen gemacht worden, die das Lesen und Verstehen erleichtern sollen. Weiter nach vorne gerutscht ist das Kapitel über „Anwendungen der elementaren Zahlentheorie“. Der Grund dafür ist allerdings eher psychologischer als inhaltlicher Natur: In einem guten Mathematikbuch erwartet man auf den hinteren Seiten schwerere Kapitel als auf den vorderen Seiten und liest sich vielleicht nicht ganz bis zum Schluss durch, wenn vorher Hürden aufgebaut sind. Dies kann als Hinweis darauf genommen werden, dass Anwendungsaspekte der Zahlentheorie nicht schwer zu verstehen sind. Die Umstellung sollte aber nicht zu dem Schluss verleiten, dass nun die zahlentheoretischen Funktionen der schwierigste Inhalt sind, denn *ein* Kapitel muss schließlich das letzte Kapitel sein. Gerade dieser Inhalt war meinem Freund und Koautor Gerald Schmieder wichtig, der leider im Sommer 2005 viel zu früh verstorben ist und an der neuen Auflage nicht mehr mitwirken konnte.

Allen Leserinnen und Lesern gilt mein herzlicher Dank für ihre Kommentare, ob es sich nun um Hinweise auf Fehler oder um Anmerkungen zur Verständlichkeit des Textes handelte. Ich werde mich auch bei dieser neuen Auflage über konstruktive Rückmeldungen sehr freuen.

München, *Kristina Reiss*
Januar 2007

Vorwort zur ersten Auflage

Liebe Leserin, lieber Leser,

herzlich willkommen zu diesem Einstieg in die Zahlentheorie. Wir vermuten, dass Sie das Mathematikstudium vor nicht allzu langer Zeit begonnen haben und denken, dass Sie Mathematik für ein Lehramt studieren. Dieses Buch wendet sich nämlich in erster Linie an Studienanfängerinnen und Studienanfänger des Lehramtstudiengangs Mathematik und ist fast unabhängig vom angestrebten Lehramt. Sicherlich werden angehende Realschul- und Gymnasiallehrer am leichtesten profitieren können, doch auch Studierende für die anderen Schultypen wollen wir keinesfalls ausschließen. Sicherlich kann die Lektüre auch für Studierende in einem Fachstudium Mathematik von Nutzen sein.

Ein Grund ist, dass viele Inhalte in dieser Einführung deutlich ausführlicher dargestellt sind, als dies in universitären Lehrbüchern üblich ist. Es geschieht in der Absicht, die oftmals recht tiefe Kluft überbrücken zu helfen, die sich zu Beginn des Studiums auftut. Es scheint manchem, der mit dem Studium beginnt, als hätte man in der Schule im Vergleich zu einer Lehrveranstaltung an der Universität eine ganz andere Art von Mathematik gelernt. Darüber hinaus wird in Lehrveranstaltungen in der Regel davon ausgegangen, dass alle Studierenden in etwa die gleichen Inhalte aus der Schule mitbringen. Die Erfahrung zeigt, dass diese Annahme auf einem Trugschluss beruht. Es gibt individuelle Unterschiede, es gibt Unterschiede zwischen Schulen, und es gibt Unterschiede zwischen den Lehrplänen verschiedener Bundesländer. Wichtig ist eigentlich nur, dass diese Unterschiede nicht den Studienerfolg beeinträchtigen. Deswegen enthalten die folgenden Seiten auch einige Begriffe, Regeln und Fakten, die eigentlich Schulstoff sind oder sein sollten. Wir sind fest davon überzeugt, dass Wiederholungen weder schädlich noch überflüssig sind, sondern vielmehr helfen, der Mathematik auf den Grund zu gehen und sie besser zu verstehen.

Mit diesem Buch kann man auf verschiedene Weise arbeiten. Man sollte aber vermutlich zunächst die ersten fünf Kapitel lesen, die einen eher einführenden Charakter haben. Doch nicht immer ist der Stoff eines ganzen Kapitels die Voraussetzung, um das nächste Kapitel zu lesen. Es wird jeweils darauf hingewiesen, wenn ein Kapitel oder ein Abschnitt nicht unbedingt zum Verständnis des nachfolgenden Stoffes notwendig ist. Man kann also, zumal beim ersten Lesen, entsprechend auch einmal „springen“.

Nun trainiert aber nur die Beschäftigung mit Mathematik die eigene mathematische Denkfähigkeit, sodass wir Sie ausdrücklich ermuntern möchten, sich auch einmal mit neuem Stoff auseinander zu setzen und Vorurteile wie „das verstehe ich sowieso nicht“ zu überwinden oder, besser noch, gar nicht erst aufkommen zu lassen. Bedenken Sie immer, dass sich viele kluge (und manchmal auch nicht ganz so kluge) Menschen vor Ihnen erfolgreich mit dem Thema des Buchs beschäftigt haben. Dann wird es sicherlich auch Ihnen gelingen. Freuen Sie sich, wenn Sie nach heftiger Auseinandersetzung mit dem Inhalt das Erfolgserlebnis des Verstehens haben. Damit das noch besser klappt, gibt es am Ende eines jeden Kapitels zahlreiche Übungsaufgaben. Wer Lösungstipps dazu möchte, findet sie, wie auch die kompletten Lösungen, am Ende des Buchs.

Wir haben es nicht als Tugend angesehen, Redundanz zu vermeiden. Ein Computer hat gespeichert, was einmal auf die Festplatte geschrieben worden ist, das menschliche Gehirn arbeitet sicher anders. Dinge von verschiedenen Seiten und wiederholt zu betrachten ist notwendig, um neue Inhalte zu lernen. Diese Redundanz betrifft auch die Beweise. Nach Möglichkeit werden die Ideen, die hinter den Beweisen stecken, vor dem eigentlichen Beweis dargestellt. Das soll helfen, den Kerngedanken eines Beweises leichter zu verstehen. Man hat ja doch oft in der Mathematik das Problem, vor lauter technischen Details den eigentlichen Sinn nicht mehr erkennen zu können (ganz davon abgesehen, dass es am Anfang des Studiums nicht leicht ist, die Kernideen von den technischen Details zu unterscheiden). Außerdem werden immer wieder mathematische Sätze mehr als einmal bewiesen. Die Mathematik kennt viele Wege zum Ziel, und verschiedene Argumente für eine Behauptung geben eine Vorstellung davon.

Viele Menschen (und das betrifft auch Studienanfänger und Studienanfängerinnen des Fachs) bringen aus der Schule die Meinung mit, die Mathematik sei eine in sich abgeschlossene Wissenschaft, in der es vielleicht ein paar ungelöste Probleme, aber keinesfalls aktuelle Forschungsfragen gibt. Im Unterricht wird der Blick auf mathematische Probleme ja meist vermieden. Das ist auch verständlich, denn der Mathematikunterricht soll Grundfertigkeiten vermitteln und nicht speziell auf eine Karriere als Mathematiker oder Mathematikerin vorbereiten. Wer jedoch Mathematik studieren und später sein erworbenes Wissen motiviert an andere Menschen weitergeben will, muss einen weiteren Horizont besitzen, als das Abitur ihn vermittelt. In das Studium sollte man daher Neugier und Begeisterung für das Fach mitbringen, aber auch ein Interesse an Problemen und ein gewisses Quantum Fleiß und Ausdauer. Selbstverständlich wird Lernen nicht durchgehend Glücksgefühle auslösen können. Auch wer zum Beispiel Pianist werden möchte, kann sich auch nicht einfach an den Flügel setzen und sofort gefeierte Konzerte geben. Haben Sie also Geduld mit sich und dem Fach, aber behalten Sie die Freude an der Mathematik.

Diesen Prinzipien folgt auch die Auswahl des angebotenen Stoffs. Wir haben uns zunächst daran orientiert, Grundlagenwissen bereitzustellen, das wir als unverzichtbar für angehende Lehrerinnen und Lehrer ansehen. Wir haben aber darüber hinaus Inhalte aufgenommen, die wesentliche Aspekte mathematischen Arbeitens exemplarisch aufzeigen können. Mathematik treiben bedeutet ganz besonders zu vermuten und zu explorieren, Zusammenhänge zu erkennen und herauszuarbeiten, den Spezialfall zu betrachten und zu verallgemeinern, das Allgemeine im Speziellen zu sehen, zu argumentieren und zu beweisen.

Das erste Kapitel behandelt einige grundlegende Mengenschreibweisen und Inhalte der elementaren Aussagenlogik. Damit wird eine gemeinsame Sprache zur Verfügung gestellt. Ohne eine solche Sprache ist es zwecklos, sich über Mathematik verständigen zu wollen. Im zweiten Kapitel geht es am Anfang um das Rechnen mit natürlichen Zahlen. Obwohl man meint, mit diesen Dingen seit der Grundschule vertraut zu sein, lohnt es sich, genauer darauf einzugehen. Es folgt eine Betrachtung der natürlichen Zahlen als unendliche Menge und eigenartiger Konsequenzen, die sich aus der Unendlichkeit ergeben. Vielen wird diese Zahlenmenge danach nicht mehr so selbstverständlich und unproblematisch vorkommen. Schließlich wird eine Möglichkeit vorgestellt, wie man sich die Menge der natürlichen Zahlen durch geeignete Axiome verschaffen kann, was das vorher eher erschütterte Vertrauen wieder aufzubauen geeignet ist.

Ist eine konkrete Zahl gegeben, so notiert man sie meistens im Dezimalsystem, als Summe von Zehnerpotenzen, multipliziert mit der jeweils zugehörigen Ziffer, die im Dezimalsystem eine der Zahlen $0, 1, \ldots, 9$ ist. Das ist zwar alte Gewohnheit, aber keineswegs die einzig mögliche Methode. Das ist der Gegenstand des dritten Kapitels. Kapitel 4 ist den Grundzügen der so genannten elementaren Zahlentheorie gewidmet. Es geht dabei um Teilbarkeit, Primzahlen und um den Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie über die Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen. Das fünfte Kapitel vertieft diese Thematik, gibt aber auch erste Einblicke in genauso alte wie aktuelle Probleme der Zahlentheorie.

Das sechste Kapitel stellt das vertraute Rechnen mit ganzen Zahlen auf eine solide Basis. Es bereitet damit auf die folgenden beiden Kapitel vor, in denen das Rechnen mit Kongruenzen betrachtet wird. Kongruenzen sind ein Kernbereich zahlentheoretischer Betrachtungen, und so geht es gerade im achten Kapitel durchaus um Inhalte, die ein wenig Eindenken erfordern.

Das neunte Kapitel fällt schließlich etwas aus dem Rahmen. Hier wird die Teilbarkeit in den so genannten Integritätsringen behandelt. Es geht prototypisch um einen Einblick in die Art und Weise mathematischen Arbeitens, also um das bereits angeführte Vermuten, Explorieren und Verallgemeinern.

In den Kapiteln 10 bis 12 wird der Bereich der ganzen Zahlen nochmals erweitert. Gegenstand des zehnten Kapitels ist es, die rationalen Zahlen aus den ganzen Zahlen zu konstruieren, was durch die Nichtlösbarkeit von Gleichungen wie $2x = 1$ innerhalb der ganzen Zahlen motiviert wird. Hinter der Einführung der reellen Zahlen steckt dagegen ein ganz anderer Wunsch, den die rationalen Zahlen nicht erfüllen. Für die meisten Leserinnen und

Leser dürften die Betrachtungen in Kapitel 11 Neuland sein, obgleich die reellen Zahlen aus der Schule durchaus vertraut sind. Im Gegensatz dazu werden die komplexen Zahlen kein Schulstoff gewesen sein, und schon der Name erzeugt oft Ehrfurcht und Respekt, weil man leicht „komplex“ gedanklich mit „kompliziert“ gleichsetzt. Dabei lassen sich die komplexen Zahlen aus den reellen viel einfacher erhalten als die reellen aus den rationalen, wovon man sich in Kapitel 12 überzeugen kann, und sie haben noch dazu eine leicht vorstellbare Veranschaulichung in Form der Punkte der Ebene. In Bezug auf das Lösen von Gleichungen eröffnen sie geradezu ein Paradies.
Kapitel 13 soll einen ersten Einblick in die Welt der zahlentheoretischen Funktionen geben, ohne dass dieses Gebiet vertieft dargestellt wird. Es wäre auch ohne sehr solide Kenntnisse der Analysis nicht möglich. Wer sich fragt, ob es in der Mathematik eigentlich noch offene Probleme gibt, findet hier reichlich Antworten. Das letzte Kapitel stellt Anwendungen vor, die vor allem auf dem Restklassenkalkül beruhen. Die aus dem Supermarkt bekannten Scannercodes und moderne Verschlüsselungsmethoden wie das so genannte RSA-Verfahren gehören dazu.

Es gibt viele Personen, die uns dabei geholfen haben, aus einem Vorlesungsskript ein Buch zu machen, und denen wir dafür ganz herzlich danken möchten. An erster Stelle sind hier Dr. Christian Groß (Augsburg) und Dipl. Math. Barbara Langfeld (München) zu nennen. Beide haben nicht nur klaglos Korrektur gelesen, sondern das Manuskript durch viele konstruktive Vorschläge bereichert. Christian Groß hat uns darüber hinaus bei der Erfassung in TeX und bei der Erstellung von Abbildungen immer wieder mit Rat und Tat zur Seite gestanden. Doris Brückner (Augsburg) hat einen Teil der Erfassung in TeX übernommen und in vielen Arbeitsgängen Korrekturen am Manuskript eingearbeitet. Ebenfalls Korrektur gelesen hat Dr. Matthias Reiss (Augsburg), von dem auch zahlreiche Vorschläge eingegangen sind, die den Text lesbarer gestaltet haben. Unser Dank gilt darüber hinaus Marianne Moormann (Augsburg), Dr. Renate Motzer (Augsburg) und Dipl. Soz. Franziska Rudolph (Augsburg) für ihre Anmerkungen. Schließlich geht ein ganz besonderer Dank an den Springer-Verlag. Die kompetente, herzliche und unterstützende Betreuung hat uns ermutigt, dieses Buch zu schreiben, und sie hat uns gerade in der letzten Phase sehr geholfen, dieses Buch auch tatsächlich fertig zu stellen. Ganz besonders danken möchten wir aber (last not least) unseren Studentinnen und Studenten, die durch kritische Fragen immer wieder gezeigt haben, an welchen Stellen des Manuskripts Erklärungsbedarf bestand (und uns sicherlich auch weiter zeigen werden, wo er noch immer besteht).

Wir hoffen, dass Sie, liebe Leserin, lieber Leser, genauso kritisch konstruktiv an den Text herangehen. Wir hoffen außerdem, dass Sie Freude an einem Gebiet der Mathematik gewinnen, das sicher nicht zu Unrecht mit dem Titel einer *Königin* dieser Wissenschaft bedacht worden ist.

Augsburg und Oldenburg, Juni 2004 *Kristina Reiss und Gerald Schmieder*

Inhaltsverzeichnis