Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

1147

Mario Wschebor

Surfaces Aléatoires

Mesure Géométrique des Ensembles de Niveau

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo

Auteur

Mario Wschebor
Universidad Simon Bolivar
Departamento de Mathemáticas
Apartado Postal No. 80659
Caracas, Venezuela

Mathematics Subject Classification (1980): 60G60, 60D05

ISBN 3-540-15688-7 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo
ISBN 0-387-15688-7 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin Tokyo

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek. Wschebor, Mario: Surfaces aléatoires: mesure géométr. des ensembles de niveau / Mario Wschebor. - Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1985.
(Lectures notes in mathematics; Vol. 1147)
ISBN 3-540-15688-7 (Berlin...)
ISBN 0-387-15688-7 (New York...)
NE: GT

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2146/3140-543210

INTRODUCTION

Soit $\left\{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\right\}$ un processus stochastique à d-paramètres réels et à valeurs réelles. Nous allons étudier un certain nombre de problèmes liés aux ensembles de niveau des trajectoires :

$$C_u^X = \left\{t : X(t) = u\right\} .$$

Sous des conditions de régularité nous pouvons définir la mesure (aléatoire) d'aire $(d-1)$-dimensionnelle de cet ensemble (nombre des points si $d = 1$, longueur de courbe si $d = 2$, aire de 2-surface si $d = 3$ et ainsi de suite) et calculer ses moments par des formules intégrales, dans le même sens que ce qui a été fait dans le cas $d = 1$, à partir des travaux de pionnier de S.O. Rice ([R2]) de 1944-45.

Or, dans le cas général il nous faut d'abord bien définir cette mesure, avoir des outils pour pouvoir l'estimer de façon convenable et étudier ses principales propriétés. Ceci est fait dans le chapitre 1, basé sur des idées développées par E. De Giorgi ([D 2],[D 3]).

Dans le chapitre 2 nous abordons la question du comportement local des trajectoires d'une surface aléatoire près d'un niveau donné, qui est étroitement liée à la géométrie de l'ensemble de niveau. La démonstration du Théorème 4 de ce chapitre dépend de façon essentielle des propriétés géométriques fines des périmètres définis au chapitre 1.

Dans le chapitre 3 nous exposons les résultats principaux, à savoir les formules de type Rice pour les moments des variables aléatoires $Q_T(A_u^X)$ (cf. chapitre 1 pour la définition).

Dans le cas $d = 1$ on retrouve bien sûr les formules classiques exposées, par exemple, dans [C5] pour les processus gaussiens stationnaires et [M2] en général.

Dans le cas $d > 1$, la formule pour le premier moment de $Q_T(A_u^X)$ a été connue pour certains processus gaussiens stationnaires avec des trajectoires suffisamment régulières déjà par M.S. Longuett-Higgins dans [L3] et démontrée aussi dans [B5] et [W3]. Un problème apparenté est considéré dans [Z1].

Sauf pour certaines situations particulières mentionnées de façon expresse, nous nous sommes en général placés dans le cadre des processus qui p.s. ont des trajectoires qui sont des fonctions de classe C^1. Les formules de Rice ont été démontrées sous des conditions un peu plus générales dans le cas $d = 1$ dans [B6] et [M2]. Néanmoins, puisque nous serons surtout intéressés au cas $d > 1$, nous restons dans des conditions qui, avec les techniques que nous allons employer, sont celles qui s'adaptent mieux aux "vraies" surfaces (i.e. au cas $d > 1$).

Le chapitre 4 décrit un exemple d'application des méthodes exposées avant, à l'approximation du temps local du processus de Wiener à d paramètres ($d \geq 1$).

En général le choix des sujets reflète plutôt les intérêts récents de l'auteur qu'une vue d'ensemble sur la théorie des surfaces aléatoires. Il s'agit aussi du développement de méthodes de calcul qui soient indépendantes d'un ordre préfixé sur l'espace paramétrique, qui, en général, n'est pas donné de façon naturelle. Un texte équilibré devrait contenir -entre autres- certains aspects de la description géométrique des ensembles de niveau des surfaces aléatoires qui ne sont pas mentionnés ici (voir, par exemple, [A2], [B4], [W2] et références citées). Aussi, l'étude de l'intégration stochastique à plusieurs paramètres et les sujets qui lui sont liés ([C2],[G1],[I2]).

Dans cette monographie nous avons inclu très peu d'exemples et d'applications. En particulier, nous allons revenir ailleurs sur les applications de la théorie exposée ici à divers problèmes de statistique, notamment à des questions de modélisation de phénomènes naturels.

Le texte est une version corrigée du cours que j'ai fait au Laboratoire de Mathématique d'Orsay en mai-juin 83. Je tiens à remercier J. Bretagnolle et D. Dacunha-Castelle et aux autres membres de l'équipe de statistique qu'ils dirigent par l'excellent climat technique et humain dont j'ai pu profiter pendant mon séjour de l'année 1983. Spécialement à Dominique Picard qui a lu une première version du manuscrit et fait des observations qui ont contribué à l'améliorer et à Nicole Parvan et Anne-Marie Baillet pour leur impeccable travail de secrétariat.

Mario Wschebor

TABLE DES MATIÈRES