

PREFACE

La Mécanique des Fluides est déjà fort ancienne, et néanmoins la très grande variété des applications qui en sont faites continuellement dans l'art de l'ingénieur la maintiennent aujourd'hui encore dans une étonnante vitalité. Elle est certes la plus simple des disciplines de Mécanique des milieux continus, et pourtant bien des situations quotidiennement rencontrées posent encore des problèmes non résolus. C'est pourquoi elle reste un champ si remarquable d'investigations à la fois techniques, expérimentales et théoriques. Il ne faut pas croire que les ingénieurs et les chercheurs qui s'y consacrent n'ont en vue que des raffinements de phénomènes qui sont, en gros, assez bien compris. Après plusieurs siècles de travaux très remarquables, de nombreux phénomènes essentiels restent encore mal donnés.

Un cours de Mécanique des Fluides reste donc aujourd'hui encore un élément capital de la formation des ingénieurs. Certes, il est impossible, compte tenu du nombre des disciplines qui leur sont nécessaires, de leur enseigner tous les chapitres de cette vaste discipline. Le professeur doit opérer un choix en fonction de sa perception des notions qu'il juge les plus importantes, et surtout de l'orientation professionnelle future de ses élèves.

Mes jeunes collègues et amis Jean-Sylvestre DARROZES et Claude FRANCOIS publient aujourd'hui le Cours de Mécanique des Fluides qu'ils donnent depuis de nombreuses années à l'Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées. L'un et l'autre sont les auteurs de beaux travaux de Mécanique Théorique des Fluides. Mais s'ils ont su utiliser leur compétence et leur maîtrise pour présenter, avec la précision et la

IV

rigueur souhaitables, les notions fondamentales, ils n'ont jamais perdu de vue l'objectif qui leur était proposé et qui était, non de former de futurs théoriciens, mais des ingénieurs qui auront à se confronter avec des problèmes fort complexes qu'il n'est pas question de traiter au niveau de l'enseignement délivré à l'école. C'est ainsi que, très heureusement, ils donnent dans cet ouvrage les outils de pensée et les méthodes mathématiques, en montrent la puissance en les appliquant à des problèmes choisis très significatifs et ouvrent souvent leur exposé sur des questions modernes que leur lecteur pourra ultérieurement approfondir, s'il désire, à partir des bases très sûres qu'il aura reçues. C'est pourquoi ces volumes seront aussi utiles aux étudiants des maîtrise de Mécanique qu'aux élèves des écoles d'ingénieurs.

Sans commenter l'ensemble de ce volume, je signalerai rapidement quelques points qui ont particulièrement retenu mon attention.

Dans la partie consacrée aux fluides parfaits, la détermination du champ des vitesses connaissant les sources et les tourbillons, pièce essentielle de la théorie, est présentée avec le langage et les notations des distributions ; la théorie des profils minces fait usage de la méthode d'Hilbert -exposée sobrement en annexe- et la théorie des corps et des ailes élancés est clairement exposée en mettant pour la première fois en évidence l'intérêt de la méthode des développements raccordés qui évite les affirmations, souvent peu convaincantes, trop fréquentes dans certaines présentations. Cette même méthode trouve naturellement son intérêt dans l'étude très complète de la couche limite laminaire dynamique et thermique. Celle des écoulements turbulents est introduite après quelques notions fort bien venues sur la stabilité et les bifurcations. Il faut enfin signaler le chapitre sur le décollement qui fait état de résultats relativement récents sur un phénomène qu'il est essentiel de comprendre et de maîtriser.

Ces quelques indications montrent bien que ce cours est principalement orienté vers les applications à l'aéronautique et l'hydrodynamique navale. Mais le souci, déjà signalé, de bien dégager avec précision les idées fondamentales fait de l'ouvrage une bonne introduction à d'autres applications de la Mécanique des fluides incompressibles. On doit donc être reconnaissant aux auteurs de nous offrir un exposé qui aidera de nombreux étudiants et ingénieurs à mieux comprendre cette discipline et à être capables de l'appliquer dans les domaines qu'ils auront à étudier et on ne peut que très vivement le leur recommander.

P. GERMAIN

*Professeur de mécanique
à l'Ecole Polytechnique
Secrétaire perpétuel de
l'Académie des Sciences*

TABLE DES MATIERES

1ère PARTIE : GENERALITES

	<u>Pages</u>
- <u>CHAPITRE I</u> : <u>Les équations de la Mécanique</u> <u>des fluides newtoniens</u>	3
I.1. Rappels de cinématique	3
I.2. Rappels de dynamique	8
I.2.1. Forme intégrale des équations	9
I.2.2. Forme locale des équations	10
I.3. Lois de comportement	11
I.4. Equation de l'énergie	13
I.5. Récapitulation : système final des équations du mouvement	16
I.5.1. Cas général d'un fluide newtonien	16
I.5.2. Fluide incompressible	17
I.5.3. Conditions initiales	23
I.5.4. Conditions aux limites	23
I.5.5. Conditions sur une surface de contact entre deux fluides visqueux	25
- <u>CHAPITRE II</u> : <u>Méthodes de résolution des équations</u> <u>de la Mécanique des fluides</u>	27
II.1. Introduction	27
II.2. Analyse dimensionnelle et similitude	29
II.2.1. Analyse simplifiée : homogénéité des relations et principaux paramètres de similitude	29
II.2.2. Analyse dimensionnelle proprement dite ...	34

	<u>Pages</u>
II.3. Similitude expérimentale	38
II.4. Solutions exactes ; solutions semblables.....	40
II.4.1. Solutions semblables.....	40
II.4.2. Autres solutions exactes	43
II.5. Méthodes approchées : approximation de fluide parfait et méthodes de perturbation.....	46
II.5.1. Approximation de fluide parfait.....	47
II.5.2. Méthodes de perturbation.....	49
II.5.3. Exemple de "solutions approchées": écoulements lentement évolutifs - Approximations par tranches	52
II.6 Les méthodes numériques.....	57
- <u>CHAPITRE III</u> : <u>Théorèmes généraux de la mécanique des fluides</u>	58
III.1. Introduction.....	58
III.2. Quelques définitions ou résultats fondamentaux...	59
III.3. Le théorème des quantités de mouvement ou théorème d'EULER.....	62
III.4. Les théorèmes de BERNOULLI.....	66
III.4.1. Premier théorème de Bernoulli pour les fluides incompressibles.....	66
III.4.2. Extension du premier théorème de Bernoulli aux fluides barotropes.....	67
III.4.3. Deuxième théorème de Bernoulli pour les fluides barotropes.....	69
III.4.4. Généralisation du premier théorème de Bernoulli dans le cas des fluides visqueux.....	71
III.4.5 Utilisation pratique des théorèmes de Bernoulli	73
III.5. Relation de CROCCO.....	74
III.6. Théorèmes concernant les propriétés du tourbil- lon en fluide parfait.....	75
III.6.1. Equation du tourbillon.....	75
III.6.2. Théorème de Kelvin.....	76
III.6.3. Théorème de Helmholtz.....	77
III.6.4. Théorème de Lagrange.....	78

DEUXIEME PARTIE : FLUIDES PARFAITS

	<u>Pages</u>
- INTRODUCTION	81
- <u>CHAPITRE IV : Solutions fondamentales de l'équation de LAPLACE et leurs propriétés</u>	83
IV.1. Solutions élémentaires.....	83
IV.1.1. Sources et Puits.....	83
IV.1.2. Doublet.....	84
IV.1.3. Potentiel de simple couche	85
IV.1.4. Potentiel de double couche	86
IV.2. Problèmes élémentaires.....	87
IV.2.1. Recherche d'un champ de vecteurs à divergence nulle connaissant son rotationnel	87
IV.2.2. Recherche d'un champ irrotationnel de vecteurs connaissant la divergence	89
IV.2.3. Recherche d'un champ de vecteurs connaissant le champ des rotationnels et la valeur de la divergence	90
IV.3. Discontinuités du champ des vitesses sur une surface	91
IV.4. Répartitions linéaires de singularités	93
IV.5. Quelques résultats mathématiques concernant l'équation de Laplace.....	94
- <u>CHAPITRE V : Méthode de la variable complexe pour les écoulements plans, irrotationnels</u>	96
V.1. Potentiel complexe ; vitesse complexe.....	96
V.2. Considérations générales sur la résolution du problème.....	99
V.3. Propriétés du potentiel complexe $f(z)$	100
V.3.1. Holomorphie.....	100
V.3.2. Théorème de LIOUVILLE	103
V.4. Problème inverse ; champs correspondant aux singularités élémentaires.....	105
V.4.1. Classification des singularités de $f(z)$	105
V.4.2. Champs élémentaires.....	107

	<u>Pages</u>
V.5. Superposition et transformations conformes	115
V.5.1. Superposition d'écoulements	115
V.5.2. Transformations conformes	122
V.5.3. Principaux types de transformations conformes	127
V.6. Retour au problème direct	135
V.6.1. Cas général et calcul des efforts globaux	135
V.6.2. Recherche pratique du potentiel	141
V.7. Analogie rhéoélectrique	155
V.7.1. Principe	158
V.7.2. Réalisation pratique	159
- <u>CHAPITRE VI : Théorie des profils minces bidimensionnels</u>	
VI.1. Formulation du problème	161
VI.2. Décomposition du problème en problème portant et problème d'épaisseur	165
VI.3. Résolution élémentaire du problème d'épaisseur	170
VI.4. Résolution élémentaire du problème inverse portant	171
VI.5. Calcul de la portance du profil	173
VI.6. Résolution complète de l'équation fondamentale de la théorie des profils minces par la méthode de HILBERT	174
VI.6.1. Formulation générale	174
VI.6.2. Résolution du problème d'épaisseur	176
VI.6.3. Résolution du problème portant	177
VI.7. Quelques compléments sur la théorie des profils	179
- <u>CHAPITRE VII : Théorie des corps minces tridimensionnels</u>	185
VII.1. Définitions.....	185
VII.2. Position du problème.....	189
VII.3. Décomposition du problème en problème d'épais- seur et problème portant.....	194
VII.4. Résolution du problème d'épaisseur.....	198
VII.5. Résolution du problème portant.....	200
VII.6. Calcul des efforts exercés sur l'aile pour le problème portant.....	204

	<u>Pages</u>
VII. 7. Théorie des corps élancés.....	207
VII.7.1. Problème "extérieur".....	207
VII.7.2. Problème "intérieur".....	210
VII.7.3. Raccord des développements - Résultat final.....	215
VII.7.4. Complément sur le problème intérieur et la condition de raccord à l'ordre ϵ^2	216
VII. 8. Ailes très élancées - Théorie de JONES.....	218
VII.8.1. La méthode des approximations par tranches.....	218
VII.8.2. Position du problème.....	219
VII.8.3. Cas particuliers de l'aile plane élancée en incidence.....	223
VII. 9. Théorie élémentaire de la ligne portance de PRANDTL.....	227
VII.9.1. Solution extérieure.....	227
VII.9.2. Solution intérieure.....	229

TROISIEME PARTIE

	Pages
<u>CHAPITRE VIII : Couche limite laminaire :</u>	
<u>Effets dynamiques</u>	238
VIII.1. Domaine de validité de l'approximation de fluide parfait.....	238
VIII.2. Etablissement des équations de la couche limite ou équations de PRANDTL	240
VIII.2.1. Etude simplifiée.....	240
VIII.2.2. Etablissement des équations de la couche limite sur plaque plane.....	245
VIII.2.3. Généralisation au cas d'un corps de forme quelconque.....	246
VIII.3. Propriétés des équations de la couche limite...	248
VIII.4. Couche limite sur plaque plane sans gradient de pression.....	256
VIII.4.1 Plaque semi infinie.....	256
VIII.4.2. Plaque finie.....	264
VIII.5. Couche limite sur plaque plane avec gradient de pression.....	265
VIII.6. Méthodes intégrales de calcul pratique des couches limites.....	271
VIII.6.1. Relation intégrale de KARMAN.....	271
VIII.6.2. Principe des méthodes intégrales approchées.....	273
VIII.6.3. Profils de POLHAUSEN pour une couche limite sans gradient de pression.....	275
VIII.6.4. Profils de POLHAUSEN pour une couche limite avec gradient de pression.....	277
VIII.6.5. Mise en oeuvre des méthodes intégrales approchées.....	278

	Pages
VIII.7. Compléments sur la théorie de la couche limite laminaire en écoulement plan.....	279
VIII.7.1. Voisinage du bord d'attaque et du bord de fuite.....	279
VIII.7.2. Effet de déplacement ; approximations d'ordre supérieur.....	281
VIII.8. Couche limite sur les corps de révolution.....	283
<u>CHAPITRE IX : Couche limite laminaire :</u>	
<u>effets thermiques</u>	286
IX.1. Position générale d'un problème thermique en mécanique des fluides incompressibles.....	286
IX.2. Formes simplifiées de l'équation de la chaleur..	289
IX.3. Couche limite thermique pour un fluide à nombre de Prandtl d'ordre unité.....	291
IX.4. Fluide excellent conducteur.....	293
IX.5. Fluide très faiblement conducteur.....	294
IX.6. Quelques définitions.....	298
IX.6.1. Définition relative à l'approximation de fluide parfait.....	298
IX.6.2. Définitions propres à la couche limite thermique.....	300
IX.7. Cas particulier : couche limite sur plaque plane sans gradient de pression.....	302
IX.7.1. Nombre de Prandtl d'ordre unité.....	302
IX.7.2. Fluide excellent conducteur de la chaleur.....	307
IX.7.3. Fluide très mauvais conducteur.....	308
IX.7.4. Résultats concernant la couche limite sur plaque plane sans gradient.....	309
IX.7.5. Résultats pour $\beta \sim 1$; $E \neq 0$	311

	Pages
IX.8. Méthode intégrale.....	312
IX.8.1. Relation intégrale déduite de l'équation de la chaleur.....	312
IX.8.2. Extension de la méthode de POLHAUSEN pour un problème de couche limite ther- mique.....	314
- <u>CHAPITRE X</u> : <u>Stabilité - Transition - Turbulence</u> ...	319
X.1. Quelques résultats expérimentaux.....	319
X.1.1. Ecoulement de Couette-Taylor.....	319
X.1.2. Problème de Bénard.....	322
X.1.3. Ecoulement dans une conduite cylindrique	324
X.2. Stabilité linéaire.....	325
X.2.2. Cas des écoulements parallèles.....	327
X.2.3. Théorème de SQUIRE	329
X.2.4. Equation d'ORR-SOMMERFELD.....	330
X.2.5. Quelques résultats généraux sur la stabi- lité des écoulements parallèles.....	331
X.2.6. Application à la couche limite.....	333
X.3. Stabilité non linéaire	336
X.3.1. Exemple type de problème de bifurcation....	337
X.3.2. Application aux équations de NAVIER-STOKES.	340
X.4. Mécanisme de la transition - passage à la turbu- lence.....	343
- <u>CHAPITRE XI</u> : <u>Écoulements turbulents</u>	345
XI.1. Généralités sur les caractères des mouvements turbulents.....	345
	.../...

XI.2. Séparation d'un écoulement turbulent en écoulement moyen et fluctuations.....	346
XI.2.1. Moyenne temporelle.....	346
XI.2.2. Moyenne spatiale.....	348
XI.2.3. Propriétés des valeurs moyennes et fluctuations.....	349
XI.3. Equations du mouvement pour un fluide à masse volumique constante.....	349
XI.3.1. Mouvement instantané.....	349
XI.3.2. Equations du mouvement moyen	350
XI.3.3. Equations pour les fluctuations.....	351
XI.3.4. Considérations générales sur le système Obtenu.....	351
XI.4. La couche limite turbulente.....	352
XI.4.1. Equations générales.....	352
XI.4.2. Structure de la couche limite turbulente..	356
XI.4.3. Théories classiques de la turbulence dans la couche limite.....	359
XI.4.3.1. Viscosité apparente.....	359
XI.4.3.2. Longueur de mélange de PRANDTL	360
XI.4.4. Méthodes intégrales pour la couche limite turbulente.....	360
XI.4.4.1. Cas des faibles gradients de pression...	360
XI.4.4.2. Compléments et discussion.....	364
<u>CHAPITRE XII : Notions sur le décollement</u>	367
XII.1. Définition.....	367
XII.2. Notions théoriques sur le décollement	367
XII.2.1. Définition.....	367
XII.2.2. Décollement en fluide parfait.....	369

XII.2.2.1. Ecoulement potentiel.....	369
XII.2.2.2. Zone tourbillonnaire fermée.....	370
XII.2.3. Décollement de la couche limite laminaire	371
XII.2.3.1. Analogie entre les équations de la couche limite et celles de la chaleur..	371
XII.2.3.2. Quelques résultats sur l'équation de la chaleur.....	372
XII.2.3.3. Application aux équation de la couche limite.....	373
XII.2.3.4. Interprétation physique des résultats mathématiques.....	374
XII.2.3.5. Schéma du décollement.....	376
XII.3. Aspects divers et conséquences pratiques du décollement.....	377
XII.3.1. Prévision du décollement.....	377
XII.3.2. Décollement et stabilité.....	379
XII.3.3. Conséquences du décollement.....	380
XII.3.4. Moyens d'éviter le décollement.....	382
XII.3.4.1. Déclenchement de la turbulence.....	382
XII.3.4.2. Augmentation des échanges avec l'extérieur.....	383
XII.3.4.3. Apport d'énergie.....	383

ANNEXES

Annexe A	: Eléments de mécanique des milieux continus ..	387
Annexe B1	: Problème de HILBERT	422
Annexe B2	: Rappels sur les distributions	432
Annexe B3	: La méthode des développements asymptotiques raccordés	437
Annexe C	: Opérateurs de dérivation sur les champs tensoriels	445
Annexe D	: Dimensions des principales grandeurs physiques	454
Références	456

INTRODUCTION

La complexité des phénomènes que l'ingénieur doit nécessairement prendre en considération dans les réalisations industrielles le conduit bien souvent à utiliser des lois semi-empiriques et des approximations parfois difficiles à justifier. Cette façon de procéder est particulièrement employée en mécanique des fluides car dans l'état actuel de nos connaissances on ne dispose pas de méthodes analytiques générales de résolution des équations complètes du mouvement.

Un tel état d'esprit, appliqué sans précaution particulière, peut être dangereux car une simplification correcte dans certaines circonstances peut conduire dans d'autres situations à des résultats complètement erronés. Il est par conséquent essentiel de définir d'abord dans quelles conditions il est possible de rechercher des solutions approchées, et seulement ensuite de présenter les principales méthodes actuellement connues pour construire ces solutions.

C'est dans ce contexte que se place le cours de Mécanique des fluides présenté dans les pages qui suivent, le point de départ étant constitué par la formulation exacte déduite de la mécanique des milieux continus, et appliquée plus particulièrement à l'étude des fluides incompressibles.

Le lecteur peut aborder ce cours sans difficulté dès l'instant où il possède les éléments indispensables de mécanique des milieux continus [1] , [2] , [3] , et de mathématiques appliquées [4] , en particulier : calcul tensoriel [5] , [3] , distributions [6] , [7] et fonctions analytiques [7] , [8] .

Le cours est divisé en trois parties :

- Première partie : Généralités
- Deuxième partie : Ecoulements de fluides parfaits
- Troisième partie : Ecoulements de fluides visqueux