Lecture Notes in Mathematics

An informal series of special lectures, seminars and reports on mathematical topics

Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

18

H.-B. Brinkmann

nach einer Vorlesung von

D. Puppe

Universität des Saarlandes, Saarbrücken

Kategorien und Funktoren

1966

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Library of Congress Catalog Card Number 66–25193. Title No. 7338.

VORWORT

Im Sommersemester 1963 habe ich an der Universität des Saarlandes eine zweistündige Vorlesung über "Kategorien und Funktoren" gehalten. In Anlehnung an diese Vorlesung hat Herr Dr. Brinkmann die vorliegende Ausarbeitung verfaßt. Er ist dabei an mehreren Stellen erheblich über den von mir vorgetragenen Stoff hinausgegangen. So stammt z.B. der ganze Abschnitt 1 über Logik und Mengenlehre von ihm. In der Vorlesung wurden diese Dinge nur kurz erwähnt. Auch das Dualitätsprinzip (2.1 - 2.4) wurde nicht so streng formalisiert wie hier. Der Inhalt der übrigen Teile stimmt in groben Zügen mit der Vorlesung überein, im einzelnen hat Herr Dr. Brinkmann die Theorie aber noch systematischer aufgebaut und viele Ergänzungen eingefügt.

Herr Reiter hat das Manuskript nochmals genau durchgesehen und in einigen Einzelheiten verbessert. Unter seiner Aufsicht wurde es von Fräulein Kurtzemann mit der Maschine geschrieben. Je einen Teil der endgültigen Fassung haben die Herren Dipl.-Math. End, Fritsch und Dipl.-Math. Kamps auf Schreibfehler und Versehen geprüft.
Ich danke allen Beteiligten für ihre Arbeit.

Unter dem Titel "Abelsche Kategorien" ist eine Fortsetzung dieser Ausarbeitung geplant.

Saarbrücken, im März 1966

D. Puppe

Einleitung und Überblick

Einleitung: Die Theorie der Kategorien hat sich aus dem Bestreben entwickelt, den Begriff der natürlichen Transformation präzise zu formulieren. Wir erläutern das an einem Beispiel (Freyd [14]). Für eine eingehendere Motivation und viele weitere Beispiele sei besonders auf die ursprüngliche Arbeit von Eilenberg-Mac Lane [12] verwiesen, die auch zur Einführung besonders gut geeignet ist.

Für jeden Vektorraum V über einem Körper K hat man den „dualen" Vektorraum LV über K, der aus allen K-linearen Abbildungen $V \longrightarrow K$ von V in K besteht. Ist V endlich-dimensional über K, so hat bekanntlich LV dieselbe Dimension wie V, und V und LV sind isomorph. Man kann eine Isomorphie herstellen, indem man zu V eine Basis $(a_1,\dots,a_n)$ wählt und in LV die durch $u_i a_j = \delta_{ij} \in K$ mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

ausgezeichneten Elemente $u_1,\dots,u_n$ betrachtet. $(u_1,\dots,u_n)$ ist bekanntlich eine Basis von LV. Die Zuordnung $(a_i \longmapsto u_i \mid i = 1,\dots,n)$ definiert eine Isomorphie $V \longrightarrow LV$, die wir mit $s(V;a_1,\dots,a_n)$ bezeichnen. Man bestätigt leicht, daß s wesentlich von der Wahl der Basis $(a_1,\dots,a_n)$ abhängt. Ist V nicht endlich-dimensional, so kann man gleichermaßen vorgehen und zu jeder Basis B von V eine K-lineare Abbildung $s(V;B):V \longrightarrow LV$ definieren. Der Kern von $s(V;B)$ ist $0 \subset V$, jedoch erhält man nicht alle Elemente von LV als Bild unter s.
Betrachten wir außerdem K-lineare Abbildungen $f:V \longrightarrow W$ von K-Vektorräumen, so prüft man leicht nach, daß man durch die Definition $(Lf)v := vf$ $(W \xrightarrow{f} V \xrightarrow{v} K)$ eine K-lineare Abbildung $Lf:LV \longrightarrow LW$ erhält. Da hierbei $L1_V = 1_{LV}$ (Identische Abbildung von V bzw. LV) und $L(gf)=(Lf)(Lg)$ gilt, nennt man L einen <u>Funktor</u> von K-Vektorräumen und K-linearen Abbildungen in K-Vektorräume und K-lineare Abbildungen. Die K-Vektorräume und ihre K-linearen Abbildungen faßt man dabei als ein mathematisches Objekt, eine <u>Kategorie</u>, auf. Man beachte, daß die Definition von L nichts mit einer Basiswahl in V zu tun hat, sondern nur die Definition der $s(V;a_1,\dots,a_n):V \longrightarrow LV$. Die Beschränkung von L auf endlich-dimensionale K-Vektorräume liefert einen Funktor in endlich-dimensionale K-Vektorräume. Bildet man LL (Nacheinanderausführen), so gilt wieder $LL1_V = 1_{LLV}$, jedoch $LL(gf) = L((Lf)(Lg)) = (LLg)(LLf)$. Man spricht von einem <u>kovarianten</u> Funktor und nennt im Gegensatz hierzu L einen <u>kontravarianten</u> Funktor.

Für endlich-dimensionale V ist offenbar V mit LLV isomorph, und wir zeigen, daß hier eine basisunabhängige Isomorphie existiert: Wir definieren für jeden K-Vektorraum V eine K-lineare Abbildung $tV:V \longrightarrow LLV$ durch Angabe der Wirkung von $(tV)v \in LLV$ (bei $v \in V$) auf $w \in LV$, nämlich $((tV)v)w := wv$. Man bestätigt leicht, daß tV für jedes V K-linear ist und den Kern 0 hat. Ist V endlich-dimensional, so ist tV demnach isomorph. Offenbar ist tV basisunabhängig definiert. Die für uns interessanteste Eigenschaft von t ist, daß für jede K-lineare Abbildung $f:V \longrightarrow W$ von K-Vektorräumen das „Diagramm"

(Diagramm 1)

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "tV"'] & W \arrow[d, "tW"] \\ LLV \arrow[r, "LLf"'] & LLW \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, was $(LLf)(tV)v = (tW)fv$ für jedes $v \in V$ bedeuten soll. Die Nachprüfung ist einfach: Man rechnet für $w \in LW$ aus, daß $(((LLf)t)v)w = ((tv)(Lf))w = (tv)(wf) = (wf)v = w(fv) = ((tv)f)w$ ist. Die Zuordnung $V \longmapsto V$, $f \longmapsto f$ nennt man den identischen Funktor „1" von K-Vektorräumen in K-Vektorräume; t heißt wegen der Kommutativität des obigen Diagramms eine <u>natürliche Transformation</u> $t:1 \longrightarrow LL$ des identischen Funktors in LL; für endlich-dimensionales V ist tV eine Isomorphie (=: Äquivalenz), daher nennt man die entsprechende Beschränkung von t eine <u>natürliche Äquivalenz</u> $1 \longrightarrow LL$ der auf endlich-dimensionale beschränkten Funktoren 1 und LL.

Sucht man bei endlich-dimensionalen V, W für L nach einem Diagramm, das dem Diagramm 1 entspricht, so wird man auf

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "sV"'] & W \arrow[d, "sW"] \\ LV & LW \arrow[l, dashed, "Lf"'] \end{tikzcd}$$

geführt, wo wir annehmen wollen, daß sV, sW irgendwelche Isomorphismen sind. Für $V \neq 0$, $W=0$ kann das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \neq V \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\cong"'] & 0 \arrow[d, "="] \\ LV & 0 \arrow[l, dashed] \end{tikzcd}$$

nicht kommutativ sein. Die Isomorphie $V \cong LV$ ist also nicht „natürlich". Selbst wenn man für f nur Automorphismen von $V = W$ zuläßt, ist es nicht möglich, einen Isomorphismus $sV = sW$ zu finden, der das Diagramm kommutativ macht (vorausgesetzt, daß (a) $\dim V \geq 2$ oder (b) $\dim V = 1$ und K nicht Primkörper der Charakteristik 2 oder 3 ist).

Überblick: Im Abschnitt 0. bringen wir einleitend die Definitionen von Kategorien und Funktoren in einer den Anwendungen angepaßten Form sowie eine Reihe von Beispielen. Im Gegensatz zu den meisten anderen Teilgebieten der Mathematik zwingt die Kategorientheorie sehr bald dazu, die verwendete Mengenlehre zu präzisieren. Daher wird in 1. eine axiomatische Mengenlehre entwickelt, die für die Kategorientheorie heute als günstigste erscheint. Wir stützen uns auf die formale Mathematik und Mengenlehre von Bourbaki [2], [3] und erweitern sie nach einem Vorschlag von Grothendieck (s. Gabriel [15]) und Sonner [34] durch ein Axiom, das die Existenz von hinreichend vielen „Universen" sichert.

Zu Beginn von 2. wiederholen wir die Definition der Kategorien in einer den Anwendungen weniger angepaßten aber für die Theorie einfacheren Form (Weglassung der Objekte). Die Betonung der Kompositionsstruktur und spätere Einführung der Objekte entspricht dem ursprünglich von Eilenberg-Mac Lane [12] eingenommenen Standpunkt. Weiter in 2. formulieren und beweisen wir das in der Theorie der Kategorien ständig benutzte und wesentlich zur Arbeitsersparnis beitragende Dualitätsprinzip als präzisen Metasatz. Hierfür wird die Formalisierung von 1. gebraucht. Der Anfänger und der an diesen formalen Erörterungen nicht interessierte Leser setze die Lektüre nach 0. mit 2.4 fort und begnüge sich mit der vorläufigen Formulierung des Dualitätsprinzips in 2.2.1. Am Ende von 2. definieren wir Diagramme (Grothendieck [17]), die in der Theorie auch als einfachere Strukturen vor Kategorien gesetzt werden können; dabei ginge aber ein wesentlicher Teil der Motivierung verloren.

3. behandelt darstellbare Funktoren in der für 5. und 7. benötigten Form. Die Kenntnis von darstellbaren Funktoren ist außerdem von allgemeinem Interesse. Der wesentliche Teil von 4. wird abgesehen von allgemeinem Interesse erst in [39] benutzt und behandelt monomorphe, epimorphe Morphismen, Einbettungen, Identifizierungen, Schnitte und Retraktionen. Im Hinblick auf diese Begriffe hat sich in der Literatur noch keine einheitliche Terminologie durchgesetzt, so daß dem unerfahrenen Leser bei der Verwendung von Literatur das Nachschlagen der jeweiligen Definition empfohlen sei.

Für die Hörer der ursprünglichen Vorlesung sei angemerkt, daß die Terminologie von 4. von der Vorlesung abweicht. Die Relation $\subset$ von 4. erscheint auch bei Kowalski [23].
Produkte und Coprodukte in 5. dienen der Vorbereitung von 7. und 8., die Nullmorphismen von 6. werden in 8. und vor allem in [39] benötigt. 7. dient der Vorbereitung von 8. und folgt im wesentlichen Eckmann-Hilton [10], so daß Einzelhinweise auf [10] im Text unterbleiben. Daß wir uns bei neutralen Morphismen für Addition und Coaddition nicht auf Nullmorphismen beschränken, hat den Grund, daß, wenn eine Kategorie $\mathfrak{C}$ Nullmorphismen hat, die Kategorie $\mathrm{Nat}(\mathfrak{C},\mathfrak{D})$ der Funktoren von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ und ihrer natürlichen Transformationen keine Nullmorphismen zu haben braucht. Wir spezialisieren vorzüglich $\mathfrak{D}$ als Kategorie der Mengen, und gerade hier können Schwierigkeiten auftreten, die man am einfachsten durch Zulassung kollabierender Morphismen als Neutrale beseitigt. Kollabierende Morphismen erscheinen bei Kowalski [23] unter dem Namen punktal. In 8. beweisen wir, daß jede Kategorie, in der Produkte oder Coprodukte für je zwei Objekte existieren, höchstens eine „Addition" zuläßt, die sie zu einer additiven Kategorie (im Sinne von Grothendieck [17]) macht und daß bei einer additiven Kategorie die Kommutativität und Assoziativität der Addition aus den übrigen Axiomen folgt. Auch diese Ergebnisse finden sich in [10], abgesehen von der Formulierung und der Aussage über die Assoziativität.
Für neuere Literatur über Kategorien verweisen wir auf die ausführlichen Verzeichnisse in Mac Lane [26] und [27].

Kategorien und Funktoren