

# Lecture Notes in Mathematics

An informal series of special lectures, seminars and reports on mathematical topics

Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

18

---

**H.-B. Brinkmann**

nach einer Vorlesung von

**D. Puppe**

Universität des Saarlandes, Saarbrücken

**Kategorien und Funktoren**

1966

---



Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

All rights, especially that of translation into foreign languages, reserved. It is also forbidden to reproduce this book, either whole or in part, by photomechanical means (photostat, microfilm and/or microcard) or by other procedure without written permission from Springer Verlag. © by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1966.  
Library of Congress Catalog Card Number 66-25193. Title No. 7338.

## VORWORT

Im Sommersemester 1963 habe ich an der Universität des Saarlandes eine zweistündige Vorlesung über "Kategorien und Funktoren" gehalten. In Anlehnung an diese Vorlesung hat Herr Dr. Brinkmann die vorliegende Ausarbeitung verfaßt. Er ist dabei an mehreren Stellen erheblich über den von mir vorgetragenen Stoff hinausgegangen. So stammt z.B. der ganze Abschnitt 1 über Logik und Mengenlehre von ihm. In der Vorlesung wurden diese Dinge nur kurz erwähnt. Auch das Dualitätsprinzip (2.1 - 2.4) wurde nicht so streng formalisiert wie hier. Der Inhalt der übrigen Teile stimmt in groben Zügen mit der Vorlesung überein, im einzelnen hat Herr Dr. Brinkmann die Theorie aber noch systematischer aufgebaut und viele Ergänzungen eingefügt.

Herr Reiter hat das Manuskript nochmals genau durchgesehen und in einigen Einzelheiten verbessert. Unter seiner Aufsicht wurde es von Fräulein Kurtzemann mit der Maschine geschrieben. Je einen Teil der endgültigen Fassung haben die Herren Dipl.-Math. End, Fritsch und Dipl.-Math. Kamps auf Schreibfehler und Versehen geprüft.

Ich danke allen Beteiligten für ihre Arbeit.

Unter dem Titel "Abelsche Kategorien" ist eine Fortsetzung dieser Ausarbeitung geplant.

Saarbrücken, im März 1966

D. Puppe

## Einleitung und Überblick

Einleitung: Die Theorie der Kategorien hat sich aus dem Bestreben entwickelt, den Begriff der natürlichen Transformation präzise zu formulieren. Wir erläutern das an einem Beispiel (Freyd [14]). Für eine eingehendere Motivation und viele weitere Beispiele sei besonders auf die ursprüngliche Arbeit von Eilenberg-Mac Lane [12] verwiesen, die auch zur Einführung besonders gut geeignet ist.

Für jeden Vektorraum  $V$  über einem Körper  $K$  hat man den „dualen“ Vektorraum  $L_V$  über  $K$ , der aus allen  $K$ -linearen Abbildungen  $V \rightarrow K$  von  $V$  in  $K$  besteht. Ist  $V$  endlich-dimensional über  $K$ , so hat bekanntlich  $L_V$  dieselbe Dimension wie  $V$ , und  $V$  und  $L_V$  sind isomorph. Man kann eine Isomorphie herstellen, indem man zu  $V$  eine Basis  $(a_1, \dots, a_n)$  wählt und in  $L_V$  die durch  $u_i a_j = \delta_{ij} \in K$  mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

ausgezeichneten Elemente  $u_1, \dots, u_n$  betrachtet.  $(u_1, \dots, u_n)$  ist bekanntlich eine Basis von  $L_V$ . Die Zuordnung  $(a_i \mapsto u_i \mid i = 1, \dots, n)$  definiert eine Isomorphie  $V \rightarrow L_V$ , die wir mit  $s(V; a_1, \dots, a_n)$  bezeichnen. Man bestätigt leicht, daß  $s$  wesentlich von der Wahl der Basis  $(a_1, \dots, a_n)$  abhängt. Ist  $V$  nicht endlich-dimensional, so kann man gleichermaßen vorgehen und zu jeder Basis  $B$  von  $V$  eine  $K$ -lineare Abbildung  $s(V; B): V \rightarrow L_V$  definieren. Der Kern von  $s(V; B)$  ist  $0 \subset V$ , jedoch erhält man nicht alle Elemente von  $L_V$  als Bild unter  $s$ .

Betrachten wir außerdem  $K$ -lineare Abbildungen  $f: V \rightarrow W$  von  $K$ -Vektorräumen, so prüft man leicht nach, daß man durch die Definition  $(Lf)_v := v f \left( W \xrightarrow{f} V \xrightarrow{v} K \right)$  eine  $K$ -lineare Abbildung  $Lf: L_V \rightarrow L_W$  erhält. Da hierbei  $L1_V = 1_{L_V}$  (Identische Abbildung von  $V$  bzw.  $L_V$ ) und  $L(gf) = (Lf)(Lg)$  gilt, nennt man  $L$  einen Funktor von  $K$ -Vektorräumen und  $K$ -linearen Abbildungen in  $K$ -Vektorräume und  $K$ -lineare Abbildungen. Die  $K$ -Vektorräume und ihre  $K$ -linearen Abbildungen faßt man dabei als ein mathematisches Objekt, eine Kategorie, auf. Man beachte, daß die Definition von  $L$  nichts mit einer Basiswahl in  $V$  zu tun hat, sondern nur die Definition der  $s(V; a_1, \dots, a_n): V \rightarrow L_V$ . Die Beschränkung von  $L$  auf endlich-dimensionale  $K$ -Vektorräume liefert einen Funktor in endlich-dimensionale  $K$ -Vektorräume. Bildet man  $LL$  (Nacheinanderausführen), so gilt wieder  $LL1_V = 1_{LLV}$ , jedoch  $LL(gf) = L((Lf)(Lg)) = (LLg)(LLf)$ . Man spricht von einem kovarianten Funktor und nennt im Gegensatz hierzu  $L$  einen kontravarianten Funktor.

Für endlich-dimensionale  $V$  ist offenbar  $V$  mit  $LLV$  isomorph, und wir zeigen, daß hier eine basisunabhängige Isomorphie existiert: Wir definieren für jeden  $K$ -Vektorraum  $V$  eine  $K$ -lineare Abbildung  $tV:V \rightarrow LLV$  durch Angabe der Wirkung von  $(tV)v \in LLV$  (bei  $v \in V$ ) auf  $w \in LV$ , nämlich  $((tV)v)w := vw$ . Man bestätigt leicht, daß  $tV$  für jedes  $V$   $K$ -linear ist und den Kern  $0$  hat. Ist  $V$  endlich-dimensional, so ist  $tV$  demnach isomorph. Offenbar ist  $tV$  basisunabhängig definiert. Die für uns interessanteste Eigenschaft von  $t$  ist, daß für jede  $K$ -lineare Abbildung  $f:V \rightarrow W$  von  $K$ -Vektorräumen das „Diagramm“

(Diagramm 1)

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ tV \downarrow & & \downarrow tW \\ LLV & \xrightarrow{LLf} & LLW \end{array}$$

kommutativ ist, was  $(LLf)(tV)v = (tW)fv$  für jedes  $v \in V$  bedeuten soll. Die Nachprüfung ist einfach: Man rechnet für  $w \in LW$  aus, daß  $((LLf)t)v_w = ((tV)(Lf))_w = (tV)(wf) = (wf)v = w(fv) = ((tV)f)_w$  ist. Die Zuordnung  $V \mapsto V, f \mapsto f$  nennt man den identischen Funktor „1“ von  $K$ -Vektorräumen in  $K$ -Vektorräume;  $t$  heißt wegen der Kommutativität des obigen Diagramms eine natürliche Transformation  $t:1 \rightarrow LL$  des identischen Funktors in  $LL$ ; für endlich-dimensionales  $V$  ist  $tV$  eine Isomorphie (= Äquivalenz), daher nennt man die entsprechende Beschränkung von  $t$  eine natürliche Äquivalenz  $1 \rightarrow LL$  der auf endlich-dimensionale beschränkten Funktoren  $1$  und  $LL$ .

Sucht man bei endlich-dimensionalen  $V, W$  für  $L$  nach einem Diagramm, das dem Diagramm 1 entspricht, so wird man auf

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ sV \downarrow & & \downarrow sW \\ LV & \xleftarrow{Lf} & LW \end{array}$$

geführt, wo wir annehmen wollen, daß  $sV, sW$  irgendwelche Isomorphismen sind. Für  $V \neq 0, W=0$  kann das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} 0 \neq V & \dashrightarrow & 0 \\ \cong \downarrow & & \downarrow = \\ LV & \dashleftarrow & 0 \end{array}$$

nicht kommutativ sein. Die Isomorphie  $V \cong LV$  ist also nicht „natürlich“. Selbst wenn man für  $f$  nur Automorphismen von  $V = W$  zuläßt, ist es nicht möglich, einen Isomorphismus  $sV = sW$  zu finden, der das Diagramm kommutativ macht (vorausgesetzt, daß (a)  $\dim V \geq 2$  oder (b)  $\dim V = 1$  und  $K$  nicht Primkörper der Charakteristik 2 oder 3 ist).

Überblick: Im Abschnitt 0. bringen wir einleitend die Definitionen von Kategorien und Funktoren in einer den Anwendungen angepaßten Form sowie eine Reihe von Beispielen. Im Gegensatz zu den meisten anderen Teilgebieten der Mathematik zwingt die Kategorientheorie sehr bald dazu, die verwendete Mengenlehre zu präzisieren. Daher wird in 1. eine axiomatische Mengenlehre entwickelt, die für die Kategorientheorie heute als günstigste erscheint. Wir stützen uns auf die formale Mathematik und Mengenlehre von Bourbaki [2], [3] und erweitern sie nach einem Vorschlag von Grothendieck (s. Gabriel [15]) und Sonner [34] durch ein Axiom, das die Existenz von hinreichend vielen „Universen“ sichert.

Zu Beginn von 2. wiederholen wir die Definition der Kategorien in einer den Anwendungen weniger angepaßten aber für die Theorie einfacheren Form (Weglassung der Objekte). Die Betonung der Kompositionsstruktur und spätere Einführung der Objekte entspricht dem ursprünglich von Eilenberg-Mac Lane [12] eingenommenen Standpunkt. Weiter in 2. formulieren und beweisen wir das in der Theorie der Kategorien ständig benutzte und wesentlich zur Arbeitersparnis beitragende Dualitätsprinzip als präzisen Metasatz. Hierfür wird die Formalisierung von 1. gebraucht. Der Anfänger und der an diesen formalen Erörterungen nicht interessierte Leser setze die Lektüre nach 0. mit 2.4 fort und begnüge sich mit der vorläufigen Formulierung des Dualitätsprinzips in 2.2.1. Am Ende von 2. definieren wir Diagramme (Grothendieck [17]), die in der Theorie auch als einfachere Strukturen vor Kategorien gesetzt werden können; dabei ginge aber ein wesentlicher Teil der Motivierung verloren. 3. behandelt darstellbare Funktoren in der für 5. und 7. benötigten Form. Die Kenntnis von darstellbaren Funktoren ist außerdem von allgemeinem Interesse. Der wesentliche Teil von 4. wird abgesehen von allgemeinem Interesse erst in [39] benutzt und behandelt monomorphe, epimorphe Morphismen, Einbettungen, Identifizierungen, Schnitte und Retraktionen. Im Hinblick auf diese Begriffe hat sich in der Literatur noch keine einheitliche Terminologie durchgesetzt, so daß dem unerfahrenen Leser bei der Verwendung von Literatur das Nachschlagen der jeweiligen Definition empfohlen sei.

Für die Hörer der ursprünglichen Vorlesung sei angemerkt, daß die Terminologie von 4. von der Vorlesung abweicht. Die Relation  $\subset$  von 4. erscheint auch bei Kowalski [23].

Produkte und Coprodukte in 5. dienen der Vorbereitung von 7. und 8., die Nullmorphismen von 6. werden in 8. und vor allem in [39] benötigt. 7. dient der Vorbereitung von 8. und folgt im wesentlichen Eckmann-Hilton [10], so daß Einzelhinweise auf [10] im Text unterbleiben. Daß wir uns bei neutralen Morphismen für Addition und Coaddition nicht auf Nullmorphismen beschränken, hat den Grund, daß, wenn eine Kategorie  $\mathfrak{C}$  Nullmorphismen hat, die Kategorie  $\text{Nat}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$  der Funktoren von  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{D}$  und ihrer natürlichen Transformationen keine Nullmorphismen zu haben braucht. Wir spezialisieren vorzüglich  $\mathfrak{C}$  als Kategorie der Mengen, und gerade hier können Schwierigkeiten auftreten, die man am einfachsten durch Zulassung kollabierender Morphismen als Neutrale beseitigt. Kollabierende Morphismen erscheinen bei Kowalski [23] unter dem Namen punktal. In 8. beweisen wir, daß jede Kategorie, in der Produkte oder Coprodukte für je zwei Objekte existieren, höchstens eine „Addition“ zuläßt, die sie zu einer additiven Kategorie (im Sinne von Grothendieck [17]) macht und daß bei einer additiven Kategorie die Kommutativität und Assoziativität der Addition aus den übrigen Axiomen folgt. Auch diese Ergebnisse finden sich in [10], abgesehen von der Formulierung und der Aussage über die Assoziativität.

Für neuere Literatur über Kategorien verweisen wir auf die ausführlichen Verzeichnisse in Mac Lane [26] und [27].

## Kategorien und Funktoren

### Einleitung und Überblick

<u>0. Kategorien und Funktoren</u>	1
0. 1 Definition von Kategorien .....	1
0. 2 Bezeichnungen .....	1
0. 3 Andere Definition von Kategorien .....	2
0. 4 Definition ohne Objekte .....	2
0. 5 Beispiele .....	2
0. 6 Funktoren .....	4
0. 7 Kategorien von Funktoren .....	5
<u>1. Logik und Mengenlehre</u>	6
1. 1 Zeichen, Terme, Formeln .....	6
1. 2 Axiome .....	7
1. 3 Beweise .....	7
1. 4 Aussagenlogik .....	8
1. 5 Einsetzen, Quantoren .....	8
1. 6 Der Hilbertsche Termoperator .....	9
1. 7 Endgültige Definition der formalen Theorie .....	9
1. 8 Mengenlehre .....	11
1. 9 Axiome der Mengenlehre .....	11
1.10 Sammelnde Formeln .....	12
1.11 Schemata der Mengenlehre .....	13
1.12 Paare .....	14
1.13 Unendlichkeits- und Auswahlaxiom .....	14
1.14 Produkte, Abbildungen, Korrespondenzen, Familien .....	15
1.15 Universen .....	15
1.16 Starke Mengenlehre .....	16
1.17 $U \notin U$ und $U = UU$ und $(U \neq \emptyset \Rightarrow N \in U)$ etc. ....	17
1.18 Vereinbarungen .....	17
<u>2. Kategorien, Dualität, Funktoren, Natürlichkeit</u>	18
2. 1 Neue Definition von Kategorien .....	18
2. 2 Dualitätsprinzip .....	20
2. 3 Beispiele .....	22
2. 4 Dualität bei Kategorien .....	23
2. 5 Teilkategorien .....	24
2. 6 Funktoren .....	25
2. 7 Kategorie der Funktoren .....	27
2. 8 Natürliche Transformationen, die Kategorie Nat .....	27
2. 9 Diagramme .....	29



<u>3. Darstellbare Funktoren</u>	33
3. 1 Äquivalenz .....	33
3. 2 Äquivalenz von Funktoren .....	34
3. 3 Hom-Funktoren .....	34
3. 4 Repräsentierbarkeit der Transformation von Hom-Funktoren ..	35
3. 5 Darstellbare Funktoren .....	36
<u>4. Einbettungen und Identifizierungen</u>	38
4. 1 Monomorph, epimorph, bimorph .....	38
4. 2 $\subset_{\mathbb{Z}}$ (Ordnung durch Bilder), $\subset_{\mathbb{Q}}$ .....	40
4. 3 $\prec_{\mathbb{Z}}$ (Ordnung durch Zerlegung), Retraktionen .....	42
4. 4 $\prec_{\mathbb{Q}}$ , Schnitte .....	43
4. 5 Äquivalenzen .....	44
4. 6 Dualitäten .....	45
4. 7 Definition von $\subset$ mit $\prec$ .....	46
4. 8 Einbettungen .....	47
4. 9 Teile .....	48
4.10 Identifizierungen, Quotienten .....	50
4.11 Beispiele .....	51
4.12 Einbettungen als repräsentierbare Funktoren .....	52
<u>5. Produkte und Coprodukte</u>	54
5. 1 Produkte von Objekten .....	54
5. 2 Produkte von Abbildungen .....	55
5. 3 Produkt als Funktor .....	57
5. 4 Übertragung von $\prec$ , $\subset$ .....	58
5. 5 Kommutativität .....	59
5. 6 Assoziativität .....	60
5. 7 Beispiele .....	60
5. 8 Coprodukte .....	61
5. 9 Matrizen .....	62
5.10 Diagonale und Codiagonale .....	64
5.11 Produkte in $\text{Nat}_{\mathbb{V}}(\mathbb{K}, \mathbb{D})$ .....	64
<u>6. Nullmorphisms</u>	66
6. 1 Nullfamilien .....	66
6. 2 Nullobjekte .....	66
6. 3 $\rho : A * A \longrightarrow A \times A$ .....	68
<u>7. Addition und Coaddition</u>	71
7. 1 Additive Objekte und Homomorphismen .....	71
7. 2 Kommutativität und Assoziativität .....	72
7. 3 Neutrale, H-Objekte .....	73
7. 4 H-Objekte und $\rho : A * A \longrightarrow A \times A$ .....	75

7. 5	Gruppenobjekte .....	76
7. 6	Übergang $(A, a) \longrightarrow (\mathcal{E}(?, A), +_a)$ .....	78
7. 7	Übergang $\mathcal{E} \longrightarrow \text{Nat}$ für Homomorphismen .....	82
7. 8	Darstellbarkeit .....	83
7. 9	Coadditionen .....	85
7.10	Beispiele .....	87
7.11	$\mathcal{E}(\text{Co-H-}, \text{H-Objekt})$ .....	90
	<u>8. Additive Kategorien</u> .....	92
8. 1	Eindeutigkeit natürlicher Additionen .....	92
8. 2	Halbadditive Kategorien .....	94
8. 3	Matrizenmultiplikation, Erweiterung zu additiver Kategorie .	96
8. 4	Präadditive Kategorien .....	98
8. 5	Additive Funktoren .....	99