

# Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

624

---

Yves Guivarc'h  
Michael Keane  
Bernard Roynette

Marches Aléatoires  
sur les Groupes de Lie

---



Springer-Verlag  
Berlin Heidelberg New York 1977

## Authors

Yves Guivarc'h

Michael Keane

U.E.R. de Mathématiques

et Informatique

Université de Rennes

B. P. 25A

35031 Rennes Cedex/France

Bernard Roynette

U.E.R. de Mathématiques

Université de Nancy I

54037 Nancy Cedex/France

---

AMS Subject Classifications (1970): 22E30, 60J15

---

ISBN 3-540-08526-2 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

ISBN 0-387-08526-2 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, re-printing, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks.

Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1977

Printed in Germany

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.

2141/3140-543210

TABLE DES MATIERES

Introduction

Chapitre I - Introduction aux Marches Aléatoires ..... 1

    A. Chaines de Markov ..... 1

    B. Généralités sur les Marches Aléatoires ..... 14

    C. Propriétés des Groupes Récurrents ..... 41

    D. Marches Aléatoires sur les Groupes Abéliens ..... 53

Chapitre II - Marches Aléatoires sur le Groupe des Déplacements de  $\mathbb{R}^d$  . 57

    A. Marches sur le Groupe des Isométries de  $\mathbb{R}^d$  ..... 57

    B. Un Théorème de Convergence pour les Groupes Compacts ..... 60

    C. Le Théorème Central Limité ..... 69

    D. Récurrence du Groupe des Déplacements de  $\mathbb{R}^2$  ..... 76

    E. Le Cas  $d \geq 3$  ..... 80

    F. Le Cas  $d \geq 3$ . Hypothèse d'Étalement ..... 90

    G. Extensions Compacts d'un Groupe Vectoriel ..... 96

Chapitre III - Marches Aléatoires sur les Groupes Nilpotents ..... 101

    A. Transience du Groupe  $H_1(\mathbb{Z})$  ..... 101

    B. La Structure des Groupes Nilpotents ..... 104

    C. Le théorème principal pour les groupes nilpotents .... 108

    D. Vitesse de Convergence vers Zéro des Potentiels à l'infini..... 118

Chapitre IV - Marches Aléatoires sur les Groupes Résolubles ..... 160

    A. Une Majoration ..... 160

    B. Un Théorème Général et Quelques Applications ..... 168

Chapitre V - Caractérisation de Certaines Classes de Groupes de Lie Récurrents .....	176
A. Cas des Groupes de Lie Connexes .....	176
B. Une Classe de Groupes Récurrents .....	179
C. Le cas des Sous-Groupes de Lie des Groupes de Lie Connexes ....	185
Chapitre VI - Marches Aléatoires Généralisées .....	192
A. Marches Aléatoires sur le Dual de $SU(2)$ .....	192
§ 1. Dualité entre $N$ et $SU(2)$ .....	192
§ 2. Marche Aléatoires (Généralisée) Associée à une Mesure de Probabilité sur $N$ .....	195
§ 3. Transience de Toutes les Marches Adaptées sur $N =  SU(2) ^{\wedge}$ .....	198
§ 4. Comportement Asymptotique de $P_n(x,y)$ , Quand. $n \rightarrow \infty$ ....	200
§ 5. Comportement Asymptotique du Noyau Potentiel $U(x,y)$ ....	208
§ 6. Etude du Temps de Séjour dans les Intervalles .....	217
§ 7. Un Théorème Central Limite .....	220
§ 8. Transience des Marches sur le Dual d'un Groupe de Lie Compact de Dimension $\geq 3$ . .....	221
§ 9. Marches Aléatoires Associées à des Fonctions Sphériques ..	225
B. Chaines de Markov Associées aux Polynomes Ultrasphériques .....	228
C. Marches Aléatoires sur un Espace Homogène Nilpotent Discret ....	261
Reférences .....	285
Appendice .....	291

## INTRODUCTION

Soit  $G$  un groupe localement compact à base dénombrable, d'élément unité  $e$ . Désignons par  $\underline{G}$  aussi bien la tribu de ses boréliens que l'ensemble des fonctions réelles définies sur  $G$  et  $G$ -mesurables. Notons  $\mathfrak{M}$  l'ensemble des mesures de Radon sur  $G$  et  $\mathcal{P}$  celui des probabilités sur  $G$ . Une marche aléatoire droite sur  $G$  est un jeu donné par une probabilité  $\mu$  appartenant à  $\mathcal{P}$ . La règle du jeu est la suivante : partant d'un point  $g_0$  de  $G$  au temps 0, nous choisissons un point aléatoire  $g_1$  de  $G$  suivant la probabilité  $\mu$ , et au temps 1, nous "marchons" de  $g_0$  à  $g_0 g_1$ . Puis on choisit un point  $g_2$  de  $G$  suivant la probabilité  $\mu$  et nous marchons au temps 2 jusqu'en  $g_0 g_1 g_2$ , etc... les choix successifs sont supposés indépendants.

Pour traduire mathématiquement ce jeu, nous disposons essentiellement de deux langages, l'un probabiliste et l'autre analytique. Dans ce travail, nous utiliserons alternativement l'un ou l'autre de ces points de vue. Par exemple, dans le langage analytique, si  $A \in \underline{G}$ , la probabilité de se trouver au temps  $n$  dans  $A$  est donnée par :  $\varepsilon_{g_0} * \mu * \dots * \mu (A)$  (où la lettre  $\mu$  est écrite  $n$  fois) et l'espérance du nombre de visites à  $A$  est donnée par le noyau potentiel.

$$U(g_0, A) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon_{g_0} * \mu^{*k} (A)$$

De la même façon, l'opérateur de transition  $P : G_+ \rightarrow G_+$  est donné par :

$$Pf(g_0) = \varepsilon_{g_0} * \mu (f) \quad , \quad \text{si bien que}$$

$$U(g_0, A) = \sum_{k=0}^{\infty} P^k 1_A (g_0)$$

Soit  $D_\mu$  le support de la probabilité  $\mu$ , et  $G_\mu$  le sous-groupe fermé de  $G$  engendré par  $D_\mu$ . Il est clair que  $G_\mu$  est une partie absorbante de  $G$ , c'est-à-dire que la marche aléatoire partant au temps 0 d'un point de  $G_\mu$  ne quitte jamais  $G_\mu$ . Cela signifie que pour cette marche aléatoire, "tout se passe" sur  $G_\mu$ . Aussi est-il bien naturel de considérer les marches aléatoires, dites adaptées, pour lesquelles  $G_\mu = G$ .

Les marches aléatoires sont divisées en deux classes. Une marche est dite récurrente si pour chaque voisinage  $V$  de  $e$  la probabilité, partant de  $e$  de visiter  $V$  au moins une fois est 1. Cela équivaut à dire que la probabilité de visiter  $V$  un nombre infini de fois vaut 1, ou encore au fait que  $U(e, V) = +\infty$  pour tout voisinage  $V$  de  $e$ . Une marche est dite transitoire si pour chaque compact  $K$  de  $G$  la probabilité, partant de  $g_0$  au temps 0, de visiter  $K$  un nombre infini de fois est nulle. Cela équivaut à dire que la suite  $g_0, g_0 g_1, g_0 g_1 g_2, \dots$  tend vers l'infini presque sûrement, ou bien que  $U(g_0, K) < +\infty$  pour tout compact  $K$ .

Un fait fondamental (voir p. 22) est que chaque marche aléatoire est ou bien récurrente, ou bien transitoire. Le groupe  $G$  est dit récurrent s'il existe une marche aléatoire adaptée récurrente sur  $G$ , et transitoire sinon. Intuitivement, il est bien clair que le fait d'être récurrent ou transitoire, mesure la "taille" du groupe  $G$ . Plus précisément, la récurrence ou la transience de  $G$  sont liées à sa croissance, et nous allons en particulier, dans ce travail, prouver partiellement une conjecture due à H. Kesten : un groupe est récurrent si et seulement si il est à croissance polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 (cf [39],[26]).

Une autre façon de "mesurer la taille" de  $G$  est, dans le cas transitoire, d'étudier le comportement à l'infini des potentiels  $U(g, K)$  des parties compactes. C'est pourquoi, dans le développement qui suit, nous nous intéresserons à la propriété pour les potentiels de tendre vers 0 à l'infini et à la vitesse de

convergence vers zéro de ces potentiels.

La méthode mise en oeuvre pour aboutir aux résultats annoncés (conjecture de H. Kesten, comportement des potentiels à l'infini) va consister à avancer graduellement du plus simple vers le plus compliqué. C'est pourquoi, nous avons choisi comme plan d'examiner successivement le cas des groupes abéliens, puis celui des groupes de déplacements, des groupes nilpotents et des groupes résolubles pour arriver finalement aux groupes de Lie généraux.

Dans tout ce qui va suivre, le temps pour nous sera discret. Disons cependant que la théorie des marches aléatoires n'est pas sans avoir des rapports étroits avec celles des mouvements browniens qui sont des processus à trajectoires continues. Par exemple, si  $\beta_t$  ( $t \in \mathbb{R}_+$ ) est un mouvement brownien droit sur  $G$ ,  $\beta_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) est une marche aléatoire droite sur  $G$ , et ainsi beaucoup de résultats vrais pour les marches aléatoires le demeurent pour les mouvements browniens.

Enfin, signalons que les méthodes mises en oeuvre ici peuvent être développées dans un cadre un peu différent de celui des groupes, et nous illustrerons ce fait au dernier chapitre.