Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

624

Yves Guivarc'h
Michael Keane
Bernard Roynette

Marches Aléatoires sur les Groupes de Lie

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1977

Authors

Yves Guivarc'h
Michael Keane

U.E.R. de Mathématiques
et Informatique
Université de Rennes
B. P. 25A
35031 Rennes Cedex/France

Bernard Roynette
U.E.R. de Mathématiques
Université de Nancy I
54037 Nancy Cedex/France

AMS Subject Classifications (1970): 22E30, 60J15

ISBN 3-540-08526-2 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-08526-2 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin

Printed in Germany

Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2141/3140-543210

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, d'élément unité e. Désignons par $\underline{\underline{G}}$ aussi bien la tribu de ses boréliens que l'ensemble des fonctions réelles définies sur G et $\underline{\underline{G}}$-mesurables. Notons $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures de Radon sur G et $\mathcal{P}$ celui des probabilités sur G. Une marche aléatoire droite sur G est un jeu donné par une probabilité μ appartenant à $\mathcal{P}$. La règle du jeu est la suivante : partant d'un point g_o de G au temps 0, nous choisissons un point aléatoire g_1 de G suivant la probabilité μ, et au temps 1, nous "marchons" de g_o à $g_o g_1$. Puis on choisit un point g_2 de G suivant la probabilité μ et nous marchons au temps 2 jusqu'en $g_o g_1 g_2$, etc... les choix successifs sont supposés indépendants.

Pour traduire mathématiquement ce jeu, nous disposons essentiellement de deux langages, l'un probabiliste et l'autre analytique. Dans ce travail, nous utiliserons alternativement l'un ou l'autre de ces points de vue. Par exemple, dans le langage analytique, si $A \in \underline{\underline{G}}$, la probabilité de se trouver au temps n dans A est donnée par : $\varepsilon_{g_o} * \mu * \cdots * \mu\ (A)$ (où la lettre μ est écrite n fois) et l'espérance du nombre de visites à A est donnée par le noyau potentiel.

$$\mathcal{U}(g_o, A) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon_{g_o} * \mu^{k}\ (A)$$

De la même façon, l'opérateur de transition $P : \underline{\underline{G}}_+ \to \underline{\underline{G}}_+$ est donné par :

$$Pf(g_o) = \varepsilon_{g_o} * \mu\ (f) \quad \text{, si bien que}$$

$$\mathcal{U}(g_o, A) = \sum_{k=0}^{\infty} P^k 1_A (g_o)$$

Soit D_μ le support de la probabilité μ , et G_μ le sous-groupe fermé de G engendré par D_μ . Il est clair que G_μ est une partie absorbante de G, c'est-à-dire que la marche aléatoire partant au temps 0 d'un point de G_μ ne quitte jamais G_μ . Cela signifie que pour cette marche aléatoire, "tout se passe" sur G_μ . Aussi est-il bien naturel de considérer les marches aléatoires, dites adaptées, pour lesquelles $G_\mu = G$.

Les marches aléatoires sont divisées en deux classes. Une marche est dite récurrente si pour chaque voisinage V de e la probabilité, partant de e de visiter V au moins une fois est 1 . Cela équivaut à dire que la probabilité de visiter V un nombre infini de fois vaut 1 , ou encore au fait que $\mathcal{U}(e, V) = +\infty$ pour tout voisinage V de e . Une marche est dite transitoire si pour chaque compact K de G la probabilité, partant de g_0 au temps 0 , de visiter K un nombre infini de fois est nulle. Cela équivaut à dire que la suite g_0 , $g_0 g_1$, $g_0 g_1 g_2$, ... tend vers l'infini presque sûrement, ou bien que $\mathcal{U}(g_0, K) < +\infty$ pour tout compact K .

Un fait fondamental (voir p. 22) est que chaque marche aléatoire est ou bien récurrente, ou bien transitoire. Le groupe G est dit récurrent s'il existe une marche aléatoire adaptée récurrente sur G , et transitoire sinon. Intuitivement, il est bien clair que le fait d'être récurrent ou transitoire, mesure la "taille" du groupe G . Plus précisément, la récurrence ou la transience de G sont liées à sa croissance, et nous allons en particulier, dans ce travail, prouver partiellement une conjecture dûe à H. Kesten : un groupe est récurrent si et seulement si il est à croissance polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 (cf [39],[26]).

Une autre façon de "mesurer la taille" de G est, dans le cas transitoire, d'étudier le comportement à l'infini des potentiels $\mathcal{U}(g, K)$ des parties compactes. C'est pourquoi, dans le développement qui suit, nous nous intéresserons à la propriété pour les potentiels de tendre vers 0 à l'infini et à la vitesse de convergence vers zéro de ces potentiels.

La méthode mise en oeuvre pour aboutir aux résultats annoncés (conjecture de H. Kesten, comportement des potentiels à l'infini) va consiter à avancer graduellement du plus simple vers le plus compliqué. C'est pourquoi, nous avons choisi comme plan d'examiner successivement le cas des groupes abéliens, puis celui des groupes de déplacements, des groupes nilpotents et des groupes résolubles pour arriver finalement aux groupes de Lie généraux.

Dans tout ce qui va suivre, le temps pour nous sera discret. Disons cependant que la théorie des marches aléatoires n'est pas sans avoir des rapports étroits avec celles des mouvements browniens qui sont des processus à trajectoires continues. Par exemple, si β_t $(t \in R_+)$ est un mouvement brownien droit sur G, β_n $(n \in \mathbb{N})$ est une marche aléatoire droite sur G, et ainsi beaucoup de résultats vrais pour les marches aléatoires le demeurent pour les mouvements browniens.

Enfin, signalons que les méthodes mises en oeuvre ici peuvent être développées dans un cadre un peu différent de celui des groupes, et nous illustrerons ce fait au dernier chapître.