MATHÉMATIQUES
&
APPLICATIONS

Directeurs de la collection :
G. Allaire et M. Benaïm

58

Grégoire Allaire

# Conception optimale de structures

Avec la participation de Marc Schoenauer (INRIA)
pour la rédaction du chapitre 8

Springer

Grégoire Allaire

Centre de Mathématiques Appliquées
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex
France
e-mail: gregoire.allaire@polytechnique.fr

Library of Congress Control Number: 2006931794

Mathematics Subject Classification (2000): 49Q10, 65K10, 74P05, 74P15, 74P20, 65M99

ISSN 1154-483X
ISBN-10 3-540-36710-1 Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN-13 978-3-540-36710-9 Springer Berlin Heidelberg New York



Springer est membre du Springer Science+Business Media

springer.com
*WMXDesign GmbH*

Imprimé sur papier non acide 3100/SPi - 5 4 3 2 1 0 -

# Avant-propos

Ce livre est issu d'un cours enseigné en troisième année de l'École Polytechnique à un public mixte d'étudiants mathématiciens appliqués et mécaniciens qui suivent une "majeure" d'enseignement dédiée aux sciences de l'ingénieur. Cette origine explique le parti prix de cet ouvrage qui se veut introductif, à caractère applicatif et numérique, et qui évite, autant que faire se peut, les difficultés mathématiques les plus théoriques ou les plus délicates. Par exemple, la notion de convergence faible n'est pas utilisée ici. On favorise systématiquement dans l'exposé une approche formelle, simple mais justifiable, à un formalisme mathématique, rigoureux mais parfois compliqué. Ce livre s'adresse donc à un public d'étudiants de Master plus intéressés par les applications numériques que par l'analyse mathématique (sans que ces deux aspects soient exclusifs l'un de l'autre). De ce point de vue, il est complémentaire d'ouvrages plus complets ou plus rigoureux mathématiquement parlant, comme [2], [29], [100].

Sur le fond, ce livre est une introduction à la conception optimale de structures, appelée aussi, plus généralement, optimisation de formes. Il s'agit de présenter et d'illustrer les méthodes mathématiques qui permettent d'automatiser la phase d'optimisation des structures mécaniques. Le point essentiel ici est "d'automatiser" ce processus, c'est-à-dire de trouver des méthodes et des algorithmes qui laissent l'ordinateur "travailler" à la place de l'ingénieur. En effet, un ingénieur compétent et intuitif est toujours capable d'optimiser "manuellement" une structure en procédant par "essais et erreurs" : après chaque évaluation d'une nouvelle forme il est capable par des heuristiques difficilement quantifiables (et fruit de son expérience) d'améliorer cette forme. Malheureusement cette façon de faire est très souvent lente, et il n'y a aucune garantie que l'ingénieur trouve un optimum absolu. Il est donc nécessaire de se donner des moyens de simulation et d'optimisation numériques qui déchargent l'ingénieur de cette tâche (ce qui lui laisse tout de même une importante marge de manoeuvre dans le choix des méthodes et dans l'appréciation de leur efficacité).

Comme nous l'avons déjà dit, pour ne pas alourdir l'exposé et rester à un niveau introductif sans négliger les applications, nous n'insisterons que très rarement sur les détails mathématiques qui permettent de donner un sens précis à tous nos développements. Rassurons le lecteur : tout ce qui suit peut se justifier rigoureusement, et nous renverrons souvent le lecteur curieux à la bibliographie qui est commentée à la fin de chaque chapitre. En particulier, ce cours n'abordera que très peu les questions théoriques (comme l'existence ou la régularité des formes optimales), et uniquement lorsque cela a des conséquences importantes du point de vue du calcul numérique. Un exemple d'une telle exception à notre démarche générale sera la présentation détaillée de contre-exemples à l'existence de formes optimales. En effet, ce phénomène de non-existence est en quelque sorte générique et systématique, il permet de comprendre certaines difficultés numériques surprenantes, et il motive l'introduction de méthodes de relaxation ou d'homogénéisation.

Le premier chapitre est consacré à une présentation des différents types d'optimisation de structures ou de modèles mécaniques utilisés dans ce cours. Bien que l'optimisation de formes soit utilisée dans de nombreux domaines des sciences de l'ingénieur (aéro- ou hydro-dynamique, acoustique, électromagnétisme, électronique, optique, etc.), nous nous contentons de la présenter et de l'illustrer dans le domaine de la mécanique des solides (c'est plus affaire de goût personnel que de choix délibéré et raisonné). C'est pourquoi nous utilisons systématiquement de manière équivalente les mots "forme" et "structure". Néanmoins, les méthodes proposées ici s'appliquent, *mutatis mutandis*, à l'ensemble des autres domaines évoqués ci-dessus. Mentionnons par ailleurs que les techniques de l'optimisation de formes sont très proches de celles des problèmes inverses, de l'assimilation de données ou du contrôle optimal. Les deuxième et troisième chapitres sont des rappels nécessaires sur l'analyse numérique des modèles mécaniques (principalement, la notion de formulation variationnelle et la méthode des éléments finis) et sur les concepts généraux d'optimisation. Que le lecteur ne soit pas effrayé par la richesse et la densité de ces chapitres : suivant l'adage "qui peut le plus peut le moins", seule une petite partie de ces chapitres sera effectivement utilisée dans la suite. Le quatrième chapitre est une brève introduction à la théorie du contrôle optimal. En fait, l'optimisation de formes peut être vue comme une branche particulière du contrôle optimal pour laquelle le contrôle ou la commande est la forme du domaine elle-même. En particulier, on retiendra de cette théorie les notions de Lagrangien et d'état adjoint qui seront capitales pour la suite. Les trois chapitres suivants étudient des situations de plus en plus compliquées d'optimisation de structures. Le cinquième chapitre porte sur l'optimisation paramétrique de formes, c'est-à-dire lorsque la forme est décrite par un nombre limité de paramètres qui permettent de se ramener à des calculs dans une géométrie fixe. Le sixième chapitre traite de l'optimisation géométrique de formes, c'est-à-dire lorsque l'on fait varier la frontière de la forme. On y présente la méthode d'Hadamard qui permet de définir une notion de dérivation par rapport au domaine. Malgré un certain succès, cette méthode présente l'inconvénient de ne jamais changer la topologie (c'est-à-dire le nombre de trous dans la structure) qui reste celle de la forme initiale. C'est pourquoi le septième chapitre est consacré à l'optimisation topologique de formes, c'est-à-dire lorsque la frontière et la topologie de la forme sont simultanément optimisées (on peut créer de nouvelles frontières ou en faire disparaître). Les contre-exemples de non-existence de formes optimales conduisent naturellement à la notion de matériaux composites qui généralise le concept classique de forme. Ces matériaux composites, caractérisés par la théorie de l'homogénéisation, permettent d'optimiser une densité de matière plutôt qu'une position de frontière. Cette méthode d'homogénéisation autorise ainsi l'optimisation de la topologie de la forme. Finalement, le huitième chapitre, rédigé par Marc Schoenauer, utilise des méthodes de l'optimisation stochastique (et non déterministe comme précédemment), et notamment des algorithmes évolutionnaires (ou génétiques), pour faire de l'optimisation géométrique et topologique qui soit globale, c'est-à-dire qui évite les minima locaux.

Les différentes approches de l'optimisation de formes sont très largement illustrées par des résultats d'applications numériques. Si la structure des algorithmes utilisés pour les obtenir est évidemment donnée dans le cours, de nombreux points pratiques d'implémentation ne sont pas discutés, faute de place. Par contre, le lecteur curieux de ces détails pratiques pourra facilement les retrouver dans les programmes informatiques qui ont permis de réaliser ces illustrations et qui sont disponibles sur le site web
`http ://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/cours_X_majeure.html`
où le lecteur pourra les télécharger librement. Ces programmes (réalisés en `FreeFem++`) sont en quelque sorte un “complément” naturel de ce cours, essentiel même pour les aspects d'implémentation informatique, et le lecteur est fortement encouragé à les utiliser pour réaliser des travaux pratiques. Le logiciel `FreeFem++` d'éléments finis en dimension deux, développé par F. Hecht et O. Pironneau, et disponible gratuitement sur le site web
`http ://www.freefem.org`
permet de programmer facilement des algorithmes d'optimisation de formes. Pour les tracés de figures `FreeFem++` a été couplé au logiciel graphique `xd3d`, développé par François Jouve à l'École Polytechnique et aussi disponible gratuitement sur le site web
`http ://www.cmap.polytechnique.fr/~jouve/xd3d`
Pour le lecteur curieux d'en savoir plus je recommande le site web dédié à l'optimisation de formes et aux recherches les plus récentes menées sur ce sujet à l'École Polytechnique
`http ://www.cmap.polytechnique.fr/~optopo`.
Le lecteur y trouvera de nombreuses illustrations numériques sous la forme de petits films, ainsi que des liens sur d'autres sites consacrés à ce sujet (notamment ceux des logiciels commerciaux d'optimisation de formes qui témoignent de l'importance industrielle du sujet).

Ce livre ne contient pas d'exercices afin de ne pas alourdir son format, et peut-être aussi pour ne pas favoriser les aspects théoriques par rapport

aux aspects pratiques et numériques de l'optimisation de forme. Néanmoins, l'étudiant qui voudrait tester ses connaissances pourra trouver plusieurs problèmes, ainsi que leurs corrigés, sur le même site web
`http ://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/cours_X_majeure.html`
où il pourra les télécharger librement.

Je remercie François Jouve pour certaines illustrations numériques de ce cours, ainsi que Marc Schoenauer pour sa contribution essentielle à ce livre. Je remercie tout particulièrement Olivier Pantz qui m'a aidé pour la réalisation des programmes `FreeFem++`, qui a relu avec soin le manuscrit et qui a participé activement à l'enseignement de ce cours à l'École Polytechnique. Malgré tout le soin que j'ai pu apporter à sa réalisation ce livre contient probablement des erreurs et je remercie à l'avance tous ceux qui me les signaleront, par exemple par courrier électronique à l'adresse
`gregoire.allaire@polytechnique.fr`.

Paris,
28 Janvier 2006 *Grégoire Allaire*

# Table des matières