

Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

153

Structure des Schémas en Groupes Réductifs



Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1970

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks.

Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1970. Library of Congress Catalog Card Number 75-134652. Printed in Germany.
Title No. 3310

Offsetdruck: Julius Beltz, Weinheim/Bergstr.

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE DU BOIS MARIE

1962/64

SCHEMAS EN GROUPES

(SGA 3)

Un séminaire dirigé par

M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK

avec la collaboration de

M. ARTIN, J.E. BERTIN, P. GABRIEL, M. RAYNAUD, J.P. SERRE

TOME III

(STRUCTURE DES SCHEMAS EN GROUPES REDUCTIFS)

TABLE DES MATIERES

<u>EXPOSE XIX</u>	<u>GROUPES REDUCTIFS. GENERALITES</u> , par M. DEMAZURE.	1
	1 - Rappels sur les groupes sur un corps algébriquement clos	2
	2 - Schémas en groupes réductifs. Définition et premières propriétés	11
	3 - Racines et systèmes de racines des schémas en groupes réductifs	16
	4 - Racines et schémas en groupes vectoriels	20
	5 - Un exemple instructif	26
	6 - Existence locale des tores maximaux. Le groupe de Weyl	31
 <u>EXPOSE XX</u>	 <u>GROUPES REDUCTIFS DE RANG SEMI-SIMPLE 1</u> , par M. DEMAZURE.	 35
	1 - Systèmes élémentaires. Les groupes P_r et P_{-r}	35
	2 - Structure des systèmes élémentaires	47
	3 - Le groupe de Weyl	60
	4 - Le théorème d'isomorphisme	71
	5 - Exemples de systèmes élémentaires, applications	73
	6 - Générateurs et relations pour un système élémentaire	80
 <u>EXPOSE XXI</u>	 <u>DONNEES RADICIELLES</u> , par M. DEMAZURE.	 85
	1 - Généralités	85
	1.1 - Définitions, premières propriétés	85
	1.2 - L'application p	89
	2 - Relations entre deux racines	92
	2.1 - Racines proportionnelles	92
	2.2 - Racines orthogonales	94
	2.3 - Cas général	95

3 - Racines simples, racines positives	97
3.1 - Systèmes de racines simples	97
3.2 - Systèmes de racines positives	101
3.3 - Caractérisation et conjugaison des systèmes de racines positives	106
3.4 - Ensembles de racines clos et symétriques	108
3.5 - Remarques diverses	112
3.6 - Chambres de Weyl	114
4 - Données radicielles réduites de rang semi-simple 2	117
5 - Le groupe de Weyl : générateurs et relations	121
6 - Morphismes de données radicielles	127
6.1 - Définition	127
6.2 - Isogénies	128
6.3 - Radical et coradical	130
6.4 - Produits de données radicielles	131
6.5 - Données radicielles induites et coinduites	133
6.6 - Poids	137
6.7 - Automorphismes	140
6.8 - p -morphismes de données radicielles réduites	142
7 - Structure	144
7.1 - Décomposition d'une donnée radicielle	144
7.2 - Propriétés des données radicielles irréductibles	147
7.3 - Matrice de Cartan	149
7.4 - Diagramme de Dynkin	151
7.5 - Compléments sur les p -morphismes	153

<u>EXPOSE XXII</u> <u>GROUPES REDUCTIFS: DEPLOIEMENTS, SOUS-GROUPES, GROUPES-QUOTIENTS,</u> par M. DEMAZURE.	156
1 - Racines et coracines. Groupes déployés et données radicielles	156
2 - Existence d'un déploiement. Type d'un groupe réductif	165
3 - Le groupe de Weyl	168
4 - Homomorphismes de groupes déployés	171
4.1 - La "grosse cellule"	171
4.2 - Morphismes de groupes déployés	177
4.3 - Quotients centraux de groupes réductifs	183

VI

5 - Sous-groupes de type (R)	187
5.1 - Groupes de type (RR)	187
5.2 - Sous-groupes de type (R)	191
5.3 - Transporteur strict de deux sous-groupes de type (R) Applications	194
5.4 - Sous-groupes de type (R) d'un groupe réductif déployé (généralités)	200
5.5 - Sous-groupes de Borel d'un groupe réductif déployé ..	204
5.6 - Sous-groupes de type (R) à fibres résolubles	212
5.7 - Théorème de Bruhat	221
5.8 - Schémas associés à un groupe réductif	228
5.9 - Propriétés particulières aux groupes de Borel	234
5.10- Sous-groupes de type (R) à fibres réductives	241
5.11- Sous-groupes de type (RC)	245
6 - Le groupe dérivé	251
6.1 - Préliminaires	251
6.2 - Groupe dérivé d'un groupe réductif	256
6.3 - Sous-groupes à quotients commutatifs	261

<u>EXPOSE XXIII</u> <u>GROUPES REDUCTIFS : UNITICITE DES GROUPES EPINGLES,</u> par M. DEMAZURE.	263
1 - Epinglages	263
2 - Générateurs et relations pour un groupe épinglé	271
3 - Groupes de rang semi-simple 2	285
3.1 - Généralités	285
3.2 - Groupes de type A_2	287
3.3 - Groupes de type B_2	291
3.4 - Groupes de type G_2	295
3.5 - Forme explicite du théorème de générateurs et relations	302
4 - Unicité des groupes épinglés : théorème fondamental	305
5 - Corollaires du théorème fondamental	313
6 - Systèmes de Chevalley	318

<u>EXPOSE XXIV</u>	<u>AUTOMORPHISMES DES GROUPES REDUCTIFS</u> , par M. DEMAZURE.	323
1 - Schéma des automorphismes d'un groupe réductif		324
2 - Automorphismes et sous-groupes		337
3 - Schéma de Dynkin d'un groupe réductif. Groupes quasi-déployés		334
4 - Isotrivialité des groupes réductifs et des fibrés principaux sous les groupes réductifs		359
4.1 - Définitions. Théorème d'isotrivialité		359
4.2 - Démonstration : le cas semi-simple		361
4.3 - Démonstration : cas général		364
4.4 - Utilisation de l'existence de tores maximaux		366
5 - Décomposition canonique d'un groupe adjoint ou simplement connexe		370
6 - Automorphismes des groupes de Borel des groupes réductifs,...		378
7 - Représentabilité des foncteurs $\text{Hom}_{S\text{-gr}}(G,H)$, G réductif.....		383
7.1 - Le cas déployé		383
7.2 - Cas général		390
7.3 - Phénomènes particuliers à la caractéristique 0		392
7.4 - Un exemple		397
8 - Appendice : cohomologie d'un groupe lisse sur un anneau hensélien, cohomologie et foncteur \prod		401
 <u>EXPOSE XXV</u>	 <u>LE THEOREME D'EXISTENCE</u> , par M. DEMAZURE.	 410
1 - Enoncé du théorème		410
2 - Théorème d'existence : construction d'un morceau de groupe ..		412
3 - Théorème d'existence : fin de la démonstration		421
4 - Appendice		424

VIII

<u>EXPOSE XXVI</u>	<u>SOUS-GROUPES PARABOLIQUES DES GROUPES REDUCTIFS,</u> par M. DEMAZURE.	426
1 - Rappels, sous-groupes de Levi		426
2 - Structure du radical unipotent d'un sous-groupe parabolique		436
3 - Schéma des sous-groupes paraboliques d'un groupe réductif..		443
4 - Position relative de deux groupes paraboliques		453
4.1 - Un résultat préliminaire		453
4.2 - Position transversale		454
4.3 - Sous-groupes paraboliques opposés		464
4.4 - Position osculatrice		470
4.5 - Position standard		474
5 - Théorème de conjugaison		479
6 - Sous-groupe paraboliques et tores triviaux		494
7 - Donnée radicielle relative		503
INDEX DES NOTATIONS		518
INDEX TERMINOLOGIQUE (pour les tomes I, II, III)		520