

# Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars

Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

130

---

Falko Lorenz

Universität Konstanz, Fachbereich Mathematik

Quadratische Formen  
über Körpern

---



Springer-Verlag

Berlin · Heidelberg · New York 1970

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks.

Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1970. Library of Congress Catalog Card Number 70-117194 Printed in Germany.  
Title No. 3286

## VORWORT

Anstoß zu der vorliegenden Ausarbeitung einer Vorlesung, die ich im Sommersemester 69 im Rahmen eines Lehrauftrages an der Universität Heidelberg gehalten habe, war ein Vortrag von E. Witt im Heidelberger Mathematischen Kolloquium. Bei dieser Gelegenheit hat Witt u.a. die bekannten Pfister'schen Resultate auf eine neue und sehr einfache Weise behandelt, indem er den Begriff der "runden" quadratischen Formen einführte. Die Darstellung der Pfister'schen Ergebnisse in dem von Witt skizzierten Rahmen wurde in §4 und §12 gegeben. Zum Begriff der runden quadratischen Formen vgl. §3.

Herrn Professor Witt bin ich für seine Zustimmung zur Herausgabe dieser Vorlesungsaufzeichnungen, die seine bisher nur mündlich kursierenden Beweise und Sätze enthalten, sehr zu Dank verpflichtet; ebenso möchte ich Herrn Pfister für seine Unterstützung vielmals danken. Besonderen Dank schulde ich auch Herrn Professor Roquette sowie Herrn J. Leicht; auf Gespräche mit Herrn Leicht geht der Inhalt von §11 zurück.

## INHALTSVERZEICHNIS

§0	<u>Präliminarien</u>	5
	Definitionen	5
	Diagonalform	7
	Summe und Produkt quadratischer Formen	8
	Wittscher Kürzungssatz	10
	Eine Formel für Binärformen (0.10)	11
	Bezeichnungen	11
	Definition des Wittschen Ringes	15
	Beispiele: reell abgeschlossene und endliche Grundkörper	15
§1	<u>Ein Satz von Cassels</u>	18
	Satz von Cassels	18
	Einsetzungsprinzip	20
	Ein Teilformensatz	20
§2	<u>Runde und multiplikative Formen</u>	22
	Der Begriff der runden Form	22
	Erzeugung runder Formen (2.3)	22
	Beispiele	23
	Zusammenhang mit der Theorie der multiplikativen Formen von Pfister	24
§3	<u>Quadratsummen und die Stufe eines Körpers</u>	27
	Ein Satz von Pfister über Produkte von Summen von Quadraten (3.1)	27
	Ein zweiter Beweis von 3.1	28

Eine Verschärfung von 3.1	28
Die Stufe eines Körpers	31
Beispiele	32
§4 <u>Torsionselemente, Nullteiler und nilpotente Elemente im Wittschen Ring</u>	33
Eine Formel von Witt	35
Torsionselemente in $\mathfrak{B}$ haben eine Zweier-Potenz als Ordnung	36
Nullteiler in $\mathfrak{B}$ haben gerade Dimension	36
Nilpotente Elemente in $\mathfrak{B}$	37
§5 <u>Ein "Hasseprinzip" für quadratische Formen über reellen Körpern</u>	39
Beweis des Hauptsatzes (5.2)	40
§6 <u>Der "Satz 7" von Witt</u>	41
Beschreibung des Wittschen Ringes durch Erzeugende und definierende Relationen	41
§7 <u>Quadratische Formen über lokalen Körpern</u>	43
Beweis eines Satzes von Springer mittels 6.1	43
§8 <u>Quadratische Formen über nicht-reellen Körpern</u>	45
$\mathfrak{B}(k)$ ist 2-Torsionsgruppe für nicht-reelles $k$	45
$\mathfrak{B}(k)$ ist endlich genau dann, wenn $k^x/k^{x^2}$ endlich ist	46
Die Körperinvariante $u$	47
Eine Abschätzung von Kaplansky	49

§9	<u>Quadratische Formen über reellen Körpern</u>	50
	Wittsche Ringe ohne Torsion	50
	Einheiten in $\mathfrak{B}(k)$ für reelles $k$	50
	Isomorphie von $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}^2$ und $k^x/k^{x2}$	51
	$\mathfrak{B}(k)$ ist noethersch genau dann, wenn $k$ nur endlich viele Quadratklassen besitzt	52
§10	<u>Bemerkungen über Erweiterung des Grundkörpers</u>	52
	Quadratische Erweiterungen	52
	Ein neuer Beweis für 4.4	54
	Eine Formel von Pfister	54
	Beweis eines Satzes von Springer	56
§11	<u>Die Primideale in <math>\mathfrak{B}(k)</math></u>	57
	Hauptsatz: Die Primideale entsprechen im wesentlichen den Ordnungen von $k$	60
	Nilradikal und Jacobsonradikal von $\mathfrak{B}$	60
	Neuer Beweis von 5.2	61
	Beschreibung der Nullteiler in $\mathfrak{B}$	64
§12	<u>Quadratische Formen über Funktionenkörpern mit reell abgeschlossenem Grundkörper</u>	65
	Satz von Tsen; die Bedingung $(T_n)$	65
	Ein Hilfssatz von Witt (12.3)	66
	Hauptsatz (12.4)	68
	Überall isotrope Formen	72
	LITERATUR	74
	INDEX	75
	LISTE DER ZEICHEN	77