Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

Series: Université de Nice, Faculté des Sciences
Adviser: J. Dieudonné

126

Pierre Schapira

Faculté des Sciences, Université de Nice
Nice/France

Théorie des Hyperfonctions

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1970

 Library of Congress Catalog Card Number 73-116601 Printed in Germany.
Title No. 3282

INTRODUCTION

La théorie des hyperfonctions est une généralisation de la théorie des distributions de L. SCHWARTZ. Les hyperfonctions sont "localement" des fonctionnelles analytiques, de même que les distributions sont "localement" à support compact. Cependant, et c'est ce qui fait leur intérêt, les hyperfonctions ont des propriétés très différentes de celles des distributions, la plus remarquable étant que toute hyperfonction sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est "prolongeable" à l'espace entier.

Avant d'être définies par A.MARTINEAU (27) comme "sommes localement finies de fonctionnelles analytiques" les hyperfonctions ont été introduites par M.SATO (32) comme "valeurs au bord de fonctions holomorphes". Cette dernière interprétation nécessite l'introduction de méthodes de la cohomologie des faisceaux, aussi n'est-elle exposée qu'au dernier chapitre.

Les hyperfonctions, et les opérations sur les hyperfonctions (convolution, multiplication etc...) sont construites au premier chapitre. Ce chapitre contient aussi un théorème du type DOLBEAULT-GROTHENDIECK sur la résolution du faisceau des fonctions holomorphes par des faisceaux d'hyperfonctions.

Le chapitre II traite des valeurs au bord des solutions des équations elliptiques : si P est un opérateur elliptique d'ordre m à coefficients analytiques au voisinage d'une hypersurface S, les m-uples d'hyperfonctions de S sont les "valeurs au bord" des solutions analytiques dans le complémentaire de S de l'équation

$$P u = 0$$

Cette représentation permet de démontrer simplement, en reprenant une méthode dûe à G. BENGEL (1) le "théorème de régularité elliptique" pour les hyperfonctions.

Le dernier paragraphe de ce chapitre concerne la représentation des distributions dans le cas particulier de l'opérateur $\partial/\partial\bar{z}$ et est une introduction au chapitre IV § 3 .

Quelques problèmes classiques d'analyse sont abordés dans le cadre des hyperfonctions au chapitre III :

- Résolution des systèmes surdéterminés à coefficients constants ; (H.KOMATSU (21)). On représente, pour résoudre ce problème, les hyperfonctions comme valeurs au bord de fonctions harmoniques (KOMATSU utilise les fonctions holomorphes) et on applique le théorème de MALGRANGE-EHRENPREIS.

- Condition nécessaire de "résolubilité" des opérateurs différentiels du premier ordre (P. SCHAPIRA (34)). On montre dans ce paragraphe comment, bien que l'espace des hyperfonctions sur un ouvert n'ait pas de topologie naturelle séparée, on peut utiliser la technique des "inégalités à priori" pour résoudre des équations aux dérivées partielles.

- Problème de division (par des matrices analytiques). Les démonstrations sont beaucoup plus simples que pour les distributions. Il suffit de "transposer" et "recoller" les théorèmes de OKA et CARTAN.

La théorie des valeurs au bord des fonctions holomorphes est étudiée au chapitre IV.

La démonstration du théorème de SATO est simplifiée par le théorème du type DOLBEAULT-GROTHENDIECK du chapitre I (ce dernier théorème est un cas particulier du théorème de KOMATSU mais cet auteur utilise le théorème de SATO pour le démontrer).

Le théorème de SATO permet, grâce au théorème des "recouvrements acycliques" de J.LERAY de représenter les hyperfonctions comme valeurs au bord de fonctions holomorphes. Seul un recouvrement particulier est considéré dans ce chapitre, et le "processus de WEIL" permettant de passer des fonctions holomorphes aux hyperfonctions est étudié en détail. On montre que ce processus "commute" avec les produits tensoriels ce qui permet dans l'étude de certains problèmes de se ramener à la dimension un.

La représentation des distributions et le théorème du "Edge of the Wedge" sont abordés superficiellement. Ce chapitre se termine par quelques applications, notamment aux équations de convolution.

Ce livre commence par deux chapitres préliminaires :

- Le chapitre A contient les principaux résultats de la théorie des espaces vectoriels topologiques, des équations aux dérivées partielles, des fonctions de plusieurs variables complexes, utilisés par la suite.
- Le chapitre B est un exposé, le plus concis possible, de la théorie des faisceaux.

Seulsle premier paragraphe et la définition B.21 du paragraphe 2 sont nécessaires à la compréhension des chapitres I, II et III. Autrement dit ces chapitres ne demandent aucune connaissance de la cohomologie des faisceaux.

La rédaction du chapitre B s'inspire évidemment du livre de R. GODEMENT (11) mais les suites spectrales ne sont pas utilisées.

Les chapitres de ce livre sont divisés en paragraphes et les énoncés sont munis d'une triple numérotation correspondant à cette division.

Chaque chapitre se termine par un court commentaire historico-bibliographique.

Le lecteur reconnaitra peut-être dans ce texte l'influence de M. André MARTINEAU. C'est en effet à lui que nous devons notre initiation à cette théorie et beaucoup d'idées de ce livre lui appartiennent.

Ce livre est basé sur un cours donné à Rio de Janeiro, à l' "Instituto de Matematica Pura e Aplicada" du "Conselho Nacional de Pesquisas" en Avril - Juillet 1969 alors que l'auteur était invité comme "Professor Visitante" et était simultanément "Attaché de Recherches" au "Centre National de la Recherche Scientifique" (France).

Nous remercions ces institutions.

Nous voudrions aussi remercier nos collègues de l' I.M.P.A. qui ont participé à notre cours et particulièrement M. Leopoldo NACHBIN.

Pierre S C H A P I R A

Rio de Janeiro

Août 1 9 6 9

TABLE DES MATIÈRES

PRÉLIMINAIRES

Nous adopterons les notations et les conventions communes des livres suivants :

En ce qui concerne

- la théorie des espaces vectoriels topologiques (13) (cf. aussi (3));
- la théorie des distributions (37);
- la théorie des équations aux dérivées partielles (18) (cf. aussi (23));
- la théorie des fonctions de variables complexes (19) (cf. aussi (16)) ;
- la théorie des faisceaux (11).

Nous supposerons connues les principaux résultats de (13) et (37) et dans une moindre mesure ceux de (18) et (19). Cependant nous préférons rappeler au chapitre A les théorèmes fondamentaux que nous utiliserons.

Au chapitre B nous exposerons les définitions et résultats de (11) dont nous avons besoin. Comme nous l'avons déjà dit seuls les deux premiers paragraphes de ce chapitre sont utilisés aux chapitres 1, 2, 3.

Nous désignerons en général par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si $\mathbb{R}^n$ est plongé dans $\mathbb{R}^{n+1}$ ou dans $\mathbb{C}^n$ par $\tilde{\Omega}$ un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ ou de $\mathbb{C}^n$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Nous désignerons par :

$\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$, $C^p(\Omega)$, $\mathcal{E}'(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{A}(\Omega)$

l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω, indéfiniment différentiable sur Ω, p fois continuement différentiable sur Ω, l'espace des distributions à supports compacts dans Ω, des distributions sur Ω, des fonctions analytiques sur Ω.

Tous ces espaces vectoriels sont complexes et seront munis , sauf le dernier, de leur topologie "naturelle", c'est-à-dire définie dans (37).

Si $\tilde{\Omega}$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $H(\tilde{\Omega})$ désignera l'espace des fonctions holomorphes sur $\tilde{\Omega}$ muni de sa topologie naturelle d'espace de FRÉCHET.

On désignera par $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^n$.

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

$z = x + iy \quad i = \sqrt{-1}$

$\bar{z} = x - iy$

On pose :

$D_{x_j} = 1/i \ \partial/\partial x_j$

$D_{z_j} = 1/i \ \partial/\partial z_j$

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose :

$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$

$D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots\ldots D_{x_n}^{\alpha_n}$

$D_z^\alpha = D_{z_1}^{\alpha_1} \ldots\ldots D_{z_n}^{\alpha_n}$

S'il n'y a pas de confusion possible on écrira :

D_j pour D_{x_j} ou D_{z_j}

D^α pour D_x^α ou D_z^α .

Si P est un polynôme à n indéterminées $P(\xi) = \sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha$

on pose

$$P(D) = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$$

$$P_m(D) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha D^\alpha$$

Tous les opérateurs différentiels que nous considérons seront, sans qu'on le rappelle, linéaires.