Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann
Series: Institut de Mathématique
Faculté des Sciences d'Orsay
Adviser: J.-P. Kahane

632

Jean-François Boutot

# Schéma de Picard Local

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1978

**Author**
Jean-François Boutot
Département de Mathématique
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg/France

Library of Congress Cataloging in Publication Data

Boutot, Jean François.
Schéma de Picard local.

(Lecture notes in mathematics ; 632)
Includes indexes.
Bibliography: p.
1. Picard schemes. 2. Functor theory. I. Title.
II. Series.
QA3.L28 no. 632 [QA564] 510'.8s [512'.33] 77-28935

AMS Subject Classifications (1970): 13F15, 13H99, 13T10, 13T15, 14B05, 14B15, 14C20, 14D20, 32B99, 32C35, 32C40, 32G13

ISBN 3-540-08650-1 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-08650-1 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin



Printing and binding: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2141/3140-543210

Le mathématicien se réveille et dit
" j'ai eu bien chaud ! "

Robert DESNOS

TABLE DES MATIÈRES

# INTRODUCTION

Soient $k$ un corps et $X_o$ un k-schéma propre. Le foncteur de Picard de $X_o$ sur $k$ est le faisceau en groupes abéliens pour la topologie étale sur les k-algèbres associé au préfaisceau qui, à une k-algèbre $A$, fait correspondre $\mathrm{Pic}(X_o \otimes_k A)$. Ce foncteur est représentable par un k-schéma en groupes localement algébrique [5] (le schéma de Picard de $X_o$) dont le groupe des composantes connexes géométriques (le groupe de Néron-Severi de $X_o$) est de type fini [32].

Le but du présent travail est de construire un analogue local de la théorie précédente. Soient $R$ une k-algèbre locale noethérienne d'idéal maximal $\underline{m}$ et de corps résiduel $k$ et $U$ l'ouvert complémentaire du point fermé dans $\mathrm{Spec}(R)$. Pour toute k-algèbre $A$, on note $R \tilde{\otimes}_k A$ l'hensélisé du couple $(R \otimes_k A, \underline{m}R \otimes_k A)$ et $\tilde{U}_A = U \otimes_R (R \tilde{\otimes}_k A)$. On appelle <u>foncteur de Picard local de</u> $R$ <u>au-dessus de</u> $k$, et on note <u>$\mathrm{Picloc}_{R/k}$</u>, le faisceau en groupes abéliens pour la topologie étale sur les k-algèbres associé au préfaisceau $A \mapsto \mathrm{Pic}(\tilde{U}_A)$.

THÉORÈME 1.- (i) <u>Si</u> $R$ <u>est de profondeur</u> $\geqslant 2$, <u>la section unité de</u> <u>$\mathrm{Picloc}_{R/k}$ est représentable par une immersion fermée de présentation finie.</u>

(ii) <u>Si de plus</u> $H^1(U, \underline{O}_U)$ <u>est de dimension finie sur</u> $k$, <u>le foncteur $\mathrm{Picloc}_{R/k}$ est représentable par un k-schéma en groupes localement de type fini d'espace tangent en l'origine</u> $H^1(U, \underline{O}_U)$.

Les hypothèses du théorème 1 (ii) sont satisfaites en particulier lorsque le complété de $R$ est normal de dimension $\geqslant 3$. Ce théorème est démontré au chapitre II, on utilise pour cela le critère de représentabilité d'Artin [5] adapté à notre situation au chapitre I.

Au chapitre III on donne quelques applications du théorème 1 , en particulier à des critères de parafactorialité qui généralisent le théorème de Ramanujam-Samuel ; puis on établit le lien entre le foncteur de Picard local de R et les revêtements abéliens finis de U et on considère le cas où R est l'anneau local d'un germe d'espace analytique complexe.

On appelle <u>groupe de Néron-Severi local</u>, et on note $\underline{\mathrm{NSloc}}_{R/k}$ , le quotient de $\underline{\mathrm{Picloc}}_{R/k}$ par sa composante neutre. Sous les hypothèses du théorème 1 (ii), il est naturel de conjecturer que, si $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k , le groupe $\underline{\mathrm{NSloc}}_{R/k}(\bar{k})$ est de type fini. Dans cette direction nous obtenons au chapitre V le résultat suivant :

THÉORÈME 2.- <u>Supposons</u> k <u>parfait et</u> R <u>excellent normal fortement désingularisable de dimension</u> $\geqslant 3$ . <u>Alors le groupe</u> $\underline{\mathrm{NSloc}}_{R/k}(\bar{k})$ <u>est de type fini.</u>

Il ne semble pas nécessaire de préciser ici l'hypothèse "fortement désingularisable" (V 3.3), elle est vérifiée dès que l'on dispose d'une bonne théorie de résolution des singularités. C'est le cas pour l'instant si k est de caractéristique 0 (H. Hironaka [30]) ou si $\dim(R) \leqslant 3$ (S.S. Abhyankar [2]).

Pour démontrer le théorème 2 on considère, pour tout R-schéma propre X , un foncteur auxiliaire $\underline{\mathrm{Pic}}^{\#}_{\tilde{X}/k}$ que l'on étudie au chapitre IV. Si X est une résolution des singularités de R (supposé excellent normal à corps résiduel parfait), on décrit $(\underline{\mathrm{Picloc}}_{R/k})_{red}$ en termes de $\underline{\mathrm{Pic}}^{\#}_{\tilde{X}/k}$ .

Pour plus de détails sur le contenu des différents chapitres, on renvoie le lecteur à la table des matières et à l'introduction placée en tête de chaque chapitre.

Avant de conclure, je voudrais exprimer ici toute ma reconnaissance à M. Raynaud, sans son aide constante et ses encouragements ce travail n'aurait jamais vu le jour. Ma reconnaissance va également à M. Artin, L. Breen et R. Elkik pour les discussions au cours desquelles ils m'ont expliqué leurs méthodes et leurs résultats, ainsi qu'à tous ceux qui m'ont encouragé par l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, en particulier J. Giraud, J. Lipman et L. Szpiro qui m'ont permis d'en exposer les états successifs dans leurs séminaires.

Madame Bonnardel a bien voulu se charger de la frappe du manuscrit, je l'en remercie vivement.