Springer-Lehrbuch

Springer
Berlin
Heidelberg
New York
Hongkong
London
Mailand
Paris
Tokio

Vladimir I. Arnold

Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen

Übersetzt aus dem Russischen von Tobias Damm

Mit 100 Abbildungen

Springer

Vladimir I. Arnold
Steklov Mathematical Institute
ul. Gubkina 8
11991 Moscow, Russia
e-mail: arnold@genesis.mi.ras.ru
and
CEREMADE
Université de Paris-Dauphine
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny
75775 Paris Cedex 16, France
e-mail: arnold@ceremade.dauphine.fr

Übersetzer
Tobias Damm
Institut für Angewandte Mathematik
TU Braunschweig
38106 Braunschweig, Germany

Übersetzung der russischen Originalausgabe „Lektsii ob uravneniyakh s chastnymi proizvodnymi" von V.I. Arnold (ISBN 5-7036-0035-9) © 1997 PHASIS, Moskau, Russland

Mathematics Subject Classification (2000): 35-01, 70-01

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

ISBN 3-540-43578-6 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Springer-Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media GmbH
springer.de

Satz: Datenerstellung durch den Übersetzer unter Verwendung eines Springer LaTeX-Makropakets
Einbandgestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier 44/3142at - 5 4 3 2 1 0

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur zweiten Auflage

Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen galt zur Mitte des 20. Jahrhunderts als Glanzstück der Mathematik. Grund dafür waren zum einen die Schwierigkeit und Bedeutung der Probleme, mit denen sie sich befaßt, zum anderen die Tatsache, daß sie sich später entwickelt hatte als die meisten anderen mathematischen Disziplinen.

Heute neigen viele dazu, dieses bemerkenswerte mathematische Gebiet mit einer gewissen Geringschätzung als eine altmodische Kunst, mit Ungleichungen zu jonglieren, oder als Versuchsgelände zur Erprobung der Funktionalanalysis zu betrachten. Der entsprechende Kurs wurde sogar aus dem Pflichtprogramm einiger Universitäten (zum Beispiel in Paris) herausgenommen. Schlimmer noch, so hervorragende Lehrbücher wie das klassische dreibändige Werk von Goursat sind wegen mangelnden Interesses aus der Bibliothek der Universität Paris 7 hinausgeworfen worden (und konnten nur dank meiner Einmischung gerettet werden, zusammen mit den Vorlesungen Kleins, Picards, Hermites, Darbouxs, Jordans, ...).

Der Grund dafür, daß diese wichtige, die gesamte Mathematik betreffende Theorie zu einem endlosen Strom von Arbeiten „Über eine Eigenschaft einer Lösung einer Randwertaufgabe einer partiellen Differentialgleichung“ verkommen konnte, liegt vermutlich in dem Versuch, eine einheitliche alles umfassende höchst abstrakte Theorie „von allem“ zu schaffen.

Partielle Differentialgleichungen treten vor allem in Modellen kontinuierlicher Medien in der mathematischen und theoretischen Physik auf. Versuche, die beachtlichen Errungenschaften der mathematischen Physik auf Systeme zu übertragen, die nur formale Ähnlichkeit mit den genannten Modellen besitzen, führen auf komplizierte und schwer überschaubare Theorien. In ähnlicher Weise führen Versuche, die Geometrie der Flächen zweiter Ordnung und die Algebra quadratischer Formen auf Objekte höherer Ordnung zu übertragen, schnell in das Dickicht der algebraischen Geometrie mit ihren entmutigenden Hierarchien komplizierter Entartungen und ihren nur theoretisch bestimmbaren Antworten.

In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ist es noch schlimmer: Die Schwierigkeiten der kommutativen algebraischen Geometrie verbinden sich hier unentwirrbar mit der nichtkommutativen Differentialalgebra und hinzu treten höchst nichttriviale Probleme der Topologie und der Analysis.

Gleichzeitig kann man sich aber in zahlreichen besonders wichtigen Problemen der mathematischen Physik auf allgemeine physikalische Prinzipien und so allgemeine Konzepte wie Energie, Variationsprinzip, Huygenssches Prinzip, Lagrangescher Multiplikator, Legendre-Transformation, Hamiltonfunktion, Eigenwert und Eigenfunktion, Welle-Teilchen Dualität, Dispersion und Fundamentallösung verlassen. Ihre Erforschung hat die Entwicklung großer Gebiete der Mathematik angeregt wie die Theorie der Fourierreihen und Fourierintegrale, die Funktionalanalysis, die algebraische Geometrie, die symplektische Topologie und die Kontakttopologie, die Theorie der Asymptotiken von Integralen, die mikrolokale Analysis, die Indextheorie von (Pseudo-)Differentialoperatoren und andere.

Eine Vertrautheit mit diesen grundlegenden mathematischen Ideen ist meiner Meinung nach absolut unverzichtbar für jeden tätigen Mathematiker. Ihre Verbannung aus der universitären mathematischen Ausbildung geschah oder geschieht in vielen westlichen Ländern unter dem Einfluß scholastischer Axiomatisierer (die mit keinerlei Anwendungen vertraut sind und nichts zu wissen wünschen als den „abstrakten Unsinn" der Algebraiker); ich halte dies für eine äußerst gefährliche Nachwirkung der Bourbakisierung sowohl der Mathematik als auch ihrer Didaktik. Das Bestreben, diese unnötige scholastische Pseudowissenschaft abzuschaffen, ist eine natürliche und gesetzmäßige Reaktion der Gesellschaft (zumal der wissenschaftlichen) auf die verantwortungslose und selbstmörderische Aggressivität der „ultrareinen" Mathematiker, erzogen im Geiste Hardys und Bourbakis.

Der Autor dieses sehr kurzen Vorlesungskurses war bestrebt, Studenten der Mathematik, die über minimale Vorkenntnisse verfügen (Lineare Algebra und Grundzüge der Analysis inklusive gewöhnliche Differentialgleichungen) mit einem Kaleidoskop grundlegender Ideen der Mathematik und Physik vertraut zu machen. Anstelle des in mathematischen Büchern üblichen Prinzips der maximalen Allgemeinheit hat sich der Autor bemüht, am Prinzip der minimalen Allgemeinheit festzuhalten, gemäß welchem jede Idee zunächst in der einfachsten Situation klar verstanden sein muß, bevor die entwickelte Methode auf kompliziertere Fälle übertragen werden kann.

Obwohl üblicherweise eine allgemeine Tatsache einfacher zu beweisen ist als ihre zahlreichen Spezialfälle, stellt eine mathematische Theorie für den Lernenden nicht mehr dar als eine Sammlung von Beispielen, die er gut und vollständig verstanden hat. Deshalb bilden gerade Beispiele und Ideen und eben nicht allgemeine Sätze und Axiome die Grundlage dieses Buches. Die Prüfungsaufgaben am Ende des Kurses sind ein wesentlicher Bestandteil.

Besondere Aufmerksamkeit wurde auf die Wechselwirkung des Gegenstandes mit anderen Bereichen der Mathematik gerichtet, insbesondere der Geometrie von Mannigfaltigkeiten, der symplektischen Geometrie und Kontaktgeometrie, der komplexen Analysis, der Variationsrechnung und der Topologie. Der Autor richtet sich an wißbegierige Studenten, hofft aber gleichzeitig, daß sogar professionelle Mathematiker mit anderen Spezialgebieten durch dieses Buch die grundlegenden und daher einfachen Ideen der mathematischen Physik und der Theorie der partiellen Differentialgleichungen kennenlernen können.

Der vorliegende Kurs wurde für Studenten im dritten Studienjahr am mathematischen College der unabhängigen Moskauer Universität im Herbstsemester 1994/95 gehalten; dabei wurden die Vorlesungen 4 und 5 von Yu. S. Ilyashenko und die Vorlesung 8 von A. G. Khovanskij gehalten. Alle Vorlesungen wurden mitgeschrieben von V. M. Imaikin (und seine Mitschrift wurde dann vom Autor überarbeitet). Allen spricht der Autor seinen tiefen Dank aus.

Die erste Auflage dieses Kurses erschien 1995 im Verlag des mathematischen Colleges der unabhängigen Moskauer Universität. In der vorliegenden Ausgabe wurden einige Ergänzungen und Korrekturen eingearbeitet.