

Springer-Lehrbuch

Klaus Jänich

Topologie

Achte Auflage
Mit 182 Abbildungen

 Springer

Prof. Dr. Klaus Jänich
Universität Regensburg
NWF I – Mathematik
93040 Regensburg, Deutschland
klaus.jaenich@mathematik.uni-regensburg.de

2. korrigierter Nachdruck 2008

ISBN 978-3-540-21393-2

e-ISBN 978-3-540-26828-4

DOI 10.1007/978-3-540-26828-4

Springer-Lehrbuch ISSN 0937-7433

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 54-01

© 2005, 2001, 1999, 1996, 1994, 1990, 1987, 1980 Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funk- sendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz: Reproduktionsfertige Vorlagen des Autors

Herstellung: LE-TeX Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig

Einbandgestaltung: WMX Design GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

9 8 7 6 5 4 3 2 1

springer.de

Vorwort zur achten Auflage

Wieder konnte ich einige Verbesserungen durchführen, insbesondere habe ich mich von Louisa Orton und Christoph Meyer überzeugen lassen müssen, dass in den Beweis auf Seite 155 noch eine Zeile mit einem weiteren Konstruktionsschritt eingefügt gehört. Das ist nun geschehen, beiden sage ich Dank.

Regensburg, im August 2004

Klaus Jänich

Vorwort zur fünften Auflage

Die Neuaufnahme des Textes in \TeX zur vorigen Auflage scheint fast keine Fehler eingeschleppt zu haben, ich brauchte nur ein x in ein y , ein V in ein U und ein v in ein f zu verwandeln und ein verlorengegangenes π einzusetzen. Außerdem hatte ich aber eine Skizze (S. 68) zu modifizieren, die schon seit der ersten Auflage da war, gegen die aber nun ein aufmerksamer Leser einen subtilen Einwand vorgebracht hat.

Regensburg, im Juni 1996

Klaus Jänich

Vorwort zur vierten Auflage

Dies ist die erste \TeX -Auflage meines Topologiebuches, und ich glaube, nur wir Autoren aus der Schreibmaschinenzeit können den Segen von \TeX ganz erfassen, so wie vermutlich nur die Petroleumlampengeneration das elektrische Licht voll zu würdigen wußte.

Die Neuauflage veranlaßte mich, den ganzen Text Wort für Wort durchzugehen. Natürlich nimmt man dabei hier und da kleine Verbesserungen vor, aber im Ganzen konnte ich das Buch lassen wie es ist. Den Vorschlag, Übungen oder Tests dazu zu schreiben, habe ich erwogen, aber dann fand ich das doch mit dem

Spaziergangs-Charakter des Buches nicht recht vereinbar. Freilich muß man eine Technik einüben, um sie anwenden zu können, aber es gibt auch eine Stufe des orientierenden Kennenlernens, und dafür ist das vorliegende Buch eben gedacht.

Regensburg, am Neujahrstage 1994

Klaus Jänich

Vorwort zur dritten Auflage

Ich freue mich, mein Buch nach zwei Auflagen als Hochschultext nun in der Springer-Lehrbuch-Reihe zu sehen. Es sei auch weiterhin allen Lesern empfohlen, die sich für eine kurze Informationsreise durch die Topologie meiner wort- und bilderreichen Führung anvertrauen mögen.

Regensburg, im August 1990

Klaus Jänich

Vorwort zur ersten Auflage

Das Buch behandelt ungefähr den Teil der Mengentheoretischen Topologie, den ein Student, der sich nicht gerade auf dieses Gebiet spezialisieren will, denn doch beherrschen sollte. Das wäre ja nun nicht gar viel und würde, lakonisch mitgeteilt, nur ein schmales Heft füllen. Auf Lakonismus ist es aber hier nicht abgesehen, sondern auf eine lebendige Vorstellung der Ideen, auf Anschauung im direkten und im höheren Sinne.

Ich denke, daß das Buch sowohl für jüngere als auch für fortgeschrittenere Leser brauchbar sein kann, wenn auch unter jeweils verschiedenen Aspekten. Eigentlich geschrieben ist es aber für mittlere Semester, für Studenten, die ihre Zwischenexamina hinter sich haben und nun beginnen, etwas freier umherzuschauen.

Herrn B. Sagraff schulde ich Dank für einen freundlichen Hinweis zum funktionalanalytischen Teil; und ich danke Th. Bröcker dafür, daß er sein Letztes Kapitel Mengenlehre in mein Buch gestiftet hat.

Regensburg, im April 1980

Klaus Jänich

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
-------------------------	---

1. Die Grundbegriffe

1.1 Der Begriff des topologischen Raumes	7
1.2 Metrische Räume	10
1.3 Unterräume, Summen und Produkte	13
1.4 Basen und Subbasen	15
1.5 Stetige Abbildungen	16
1.6 Zusammenhang	18
1.7 Das Hausdorffsche Trennungsaxiom	22
1.8 Kompaktheit	24

2. Topologische Vektorräume

2.1 Der Begriff des topologischen Vektorraumes	30
2.2 Endlichdimensionale Vektorräume	31
2.3 Hilberträume	32
2.4 Banachräume	33
2.5 Fréchet-Räume	34
2.6 Lokalkonvexe topologische Vektorräume	36
2.7 Ein paar Beispiele	36

3. Die Quotiententopologie

3.1 Der Begriff des Quotientenraumes	39
3.2 Quotienten und Abbildungen	41
3.3 Eigenschaften von Quotientenräumen	42
3.4 Beispiele: Homogene Räume	43
3.5 Beispiele: Orbiträume	47

3.6	Zusammenschlagen eines Teilraumes zu einem Punkt	50
3.7	Zusammenkleben von topologischen Räumen	54
4. Vervollständigung metrischer Räume		
4.1	Die Vervollständigung eines metrischen Raumes	62
4.2	Vervollständigung von Abbildungen	67
4.3	Vervollständigung normierter Räume	69
5. Homotopie		
5.1	Homotope Abbildungen	73
5.2	Homotopieäquivalenz	76
5.3	Beispiele	77
5.4	Kategorien	81
5.5	Funktoren	85
5.6	Was ist Algebraische Topologie?	87
5.7	Wozu Homotopie?	91
6. Die beiden Abzählbarkeitsaxiome		
6.1	Erstes und Zweites Abzählbarkeitsaxiom ...	97
6.2	Unendliche Produkte	99
6.3	Die Rolle der Abzählbarkeitsaxiome	101
7. <i>CW</i>-Komplexe		
7.1	Simpliziale Komplexe	108
7.2	Zellenzerlegungen	115
7.3	Der Begriff des <i>CW</i> -Komplexes	118
7.4	Unterkomplexe	120
7.5	Das Anheften von Zellen	122
7.6	Die größere Flexibilität der <i>CW</i> -Komplexe	124
7.7	Ja, aber?	126

8. Konstruktion von stetigen Funktionen auf topologischen Räumen

8.1	Das Urysohnsche Lemma	130
8.2	Der Beweis des Urysohnschen Lemmas	136
8.3	Das Tietzesche Erweiterungslemma	140
8.4	Zerlegungen der Eins und Schnitte in Vektorraumbündeln	142
8.5	Parakompaktheit	151

9. Überlagerungen

9.1	Topologische Räume über X	156
9.2	Der Begriff der Überlagerung	160
9.3	Das Hochheben von Wegen	163
9.4	Einleitung zur Klassifikation der Überlagerungen	167
9.5	Fundamentalgruppe und Hochhebeverhalten	172
9.6	Die Klassifikation der Überlagerungen	176
9.7	Deckbewegungsgruppe und universelle Überlagerung	183
9.8	Von der Rolle der Überlagerungen in der Mathematik	191

10. Der Satz von Tychonoff

10.1	Ein unplausibler Satz?	197
10.2	Vom Nutzen des Satzes von Tychonoff	200
10.3	Der Beweis	207

11. Letztes Kapitel. Mengenlehre

(von Th. Bröcker)	212
-------------------------	-----

Literaturverzeichnis	219
----------------------------	-----

Symbolverzeichnis	221
-------------------------	-----

Register	224
----------------	-----