

# Teubner Studienbücher

## Mathematik

Ahlswede/Wegener: **Suchprobleme**  
328 Seiten. DM 28,80

Ansorge: **Differenzenapproximationen partieller Anfangswertaufgaben**  
298 Seiten. DM 29,80 (LAMM)

Böhmer: **Spline-Funktionen**  
Theorie und Anwendungen. 340 Seiten. DM 28,80

Clegg: **Variationsrechnung**  
138 Seiten. DM 17,80

Collatz: **Differentialgleichungen**  
Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen  
5. Aufl. 226 Seiten. DM 24,80 (LAMM)

Collatz/Krabs: **Approximationstheorie**  
Tschebyscheffsche Approximation mit Anwendungen. 208 Seiten. DM 28,—

Constantinescu: **Distributionen und ihre Anwendung in der Physik**  
144 Seiten. DM 18,80

Fischer/Sacher: **Einführung in die Algebra**  
2. Aufl. 240 Seiten. DM 18,80

Grigorieff: **Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen**  
Band 1: Einschrittverfahren. 202 Seiten. DM 16,80  
Band 2: Mehrschrittverfahren. 411 Seiten. DM 29,80

Hainzl: **Mathematik für Naturwissenschaftler**  
2. Aufl. 311 Seiten. DM 29,— (LAMM)

Hässig: **Graphentheoretische Methoden des Operations Research**  
160 Seiten. DM 26,80 (LAMM)

Hilbert: **Grundlagen der Geometrie**  
12. Aufl. VII, 271 Seiten. DM 24,80

Jaeger/Wenke: **Lineare Wirtschafts algebra**  
Eine Einführung  
Band 1: vergriffen  
Band 2: IV, 160 Seiten. DM 19,80 (LAMM)

Jeggle: **Nichtlineare Funktionalanalysis**  
Existenz von Lösungen nichtlinearer Gleichungen. 255 Seiten. DM 24,80

Kall: **Mathematische Methoden des Operations Research**  
Eine Einführung. 176 Seiten. DM 22,80 (LAMM)

Kochendörffer: **Determinanten und Matrizen**  
IV, 148 Seiten. DM 17,80

Kohlas: **Stochastische Methoden des Operations Research**  
192 Seiten. DM 24,80 (LAMM)

Fortsetzung auf der 3. Umschlagseite

**Teubner Studienbücher    Mathematik**

**B. Rauhut / N. Schmitz / E.-W. Zachow  
Spieltheorie**

# **Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik LAMM**

Unter Mitwirkung von

Prof. Dr. E. Becker, Darmstadt

Prof. Dr. G. Hotz, Saarbrücken

Prof. Dr. P. Kall, Zürich

Prof. Dr. K. Magnus, München

Prof. Dr. E. Meister, Darmstadt

Prof. Dr. Dr. h. c. F. K. G. Odqvist, Stockholm

herausgegeben von

Prof. Dr. Dr. h. c. H. Görtler, Freiburg

**Band 49**

Die Lehrbücher dieser Reihe sind einerseits allen mathematischen Theorien und Methoden von grundsätzlicher Bedeutung für die Anwendung der Mathematik gewidmet; andererseits werden auch die Anwendungsgebiete selbst behandelt. Die Bände der Reihe sollen dem Ingenieur und Naturwissenschaftler die Kenntnis der mathematischen Methoden, dem Mathematiker die Kenntnisse der Anwendungsgebiete seiner Wissenschaft zugänglich machen. Die Werke sind für die angehenden Industrie- und Wirtschaftsmathematiker, Ingenieure und Naturwissenschaftler bestimmt, darüber hinaus aber sollen sie den im praktischen Beruf Tätigen zur Fortbildung im Zuge der fortschreitenden Wissenschaft dienen.

# **Spieltheorie**

**Eine Einführung in die mathematische  
Theorie strategischer Spiele**

**Von Dr. rer. nat. Burkhard Rauhut  
o. Professor an der Technischen Hochschule Aachen**

**Dr. rer. nat. Norbert Schmitz  
o. Professor an der Universität Münster**

**und Dr. rer. nat. Ernst-Wilhelm Zachow  
Akad. Rat an der Universität Münster**

**Mit 35 Abbildungen, 50 Aufgaben  
und zahlreichen Beispielen**



**B. G. Teubner Stuttgart 1979**

**Prof. Dr. rer. nat. Burkhard Rauhut**

Geboren 1942 in Berlin. Von 1961 bis 1966 Studium der Mathematik, Physik und Wirtschaftswissenschaften an den Universitäten Berlin (FU) und Göttingen und an der TH Karlsruhe. Diplom in Mathematik 1966 in Göttingen. 1970 Promotion und 1970 Habilitation an der Universität Karlsruhe (TH). 1972 apl. Professor an der Universität Karlsruhe (TH). Seit 1973 o. Professor und Direktor des Instituts für Statistik und Wirtschaftsmathematik der RWTH Aachen.

**Prof. Dr. rer. nat. Norbert Schmitz**

Geboren 1939 in Münster. Von 1958 bis 1964 Studium der Mathematik und Physik an den Universitäten Münster und München. 1964 Diplom in Mathematik, 1964 Staatsexamen in Mathematik und Physik. 1966 Promotion an der Universität Münster. 1970 Habilitation an der Universität Karlsruhe (TH). Von 1970 bis 1972 Wiss. Rat und Professor an der FU Berlin. Seit 1972 o. Professor und Direktor des Instituts für Mathematische Statistik der Universität Münster.

**Dr. rer. nat. Ernst-Wilhelm Zachow**

Geboren 1951 in Berlin. Von 1969 bis 1974 Studium der Mathematik an der Universität Münster. 1974 Diplom in Mathematik, 1976 Promotion an der Universität Münster. Seit 1977 Akad. Rat am Institut für Mathematische Statistik der Universität Münster.

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

**Rauhut, Burkhard:**

Spieltheorie : e. Einf. in d. math. Theorie strateg.  
Spiele / von Burkard Rauhut, Norbert Schmitz u.  
Ernst-Wilhelm Zachow. — Stuttgart : Teubner, 1979. —  
(Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik ;  
Bd. 49) (Teubner Studienbücher : Mathematik)  
ISBN 978-3-519-02351-7      ISBN 978-3-322-99574-2 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-322-99574-2

NE: Schmitz, Norbert ; Zachow, Ernst-Wilhelm:

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an den Verlag gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist.

© B. G. Teubner, Stuttgart 1979

Gesamtherstellung: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstraße  
Umschlaggestaltung: W. Koch, Sindelfingen

## V o r w o r t

Die mathematische Theorie strategischer Spiele wurde von dem Mathematiker J. von Neumann gemeinsam mit dem Wirtschaftswissenschaftler O. Morgenstern entwickelt, um eine rationale Analyse von ökonomischen Interessengegensätzen und sozialen Konfliktsituationen zu ermöglichen - ihr klassisches und immer noch fundamentales Werk hat den Titel "Theory of Games and Economic Behavior" ("Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten"). So weist die Spieltheorie in besonderer Weise die beiden Aspekte auf, die eine angewandt-mathematische Disziplin auszeichnen: Zum einen entstammen die Problemstellungen den Substanzwissenschaften und die von der Theorie gelieferten Antworten müssen der Überprüfung durch die Praxis gewärtig sein, zum anderen hat eine formale Präzisierung der Fragestellungen und eine exakte Behandlung im mathematischen Modell zu erfolgen, um so Aussagen von genereller Gültigkeit zu erhalten.

Bei dem vorliegenden Lehrbuch haben wir versucht, beide Aspekte gleichrangig zu berücksichtigen: Einerseits haben wir besondere Sorgfalt auf ausführliche Motivationen, eine detaillierte Modellbildung, die Behandlung von anschaulichen Beispielen und die Angabe illustrativer Aufgaben verwendet, andererseits waren wir bemüht, die Begriffsbildungen, Aussagen und Beweise auch dann mathematisch exakt zu formulieren, wenn dies einen etwas größeren "technischen" Aufwand erforderte. Es kann sich empfehlen, bei einem ersten Lesen umfangreichere Beweise (z.B. bei den Sätzen (1.23), (1.27), (2.4) und (2.10)) oder die Behandlung von Detailfragen (z.B. § 4 von Kapitel I und § 5 von Kapitel III) zu überschlagen. Diesem Hinweis ist teilweise bereits dadurch Rechnung getragen worden, daß etliche "technische" Beweise in Kleindruck geschrieben sind; hier gilt jedoch dasselbe wie bei Verträgen - wenn man es genau wissen will, sollte man auch das Kleingedruckte lesen.

Als einführendes Lehrbuch enthält dieser Text natürlich viele "klassische" Resultate, jedoch wird der Kenner an etlichen Stellen auch Ergebnisse registrieren, die hier erstmalig in Lehrbuchform dargestellt sind. Selbstverständlich konnte aus der Fülle dessen, was die Spieltheorie heute beinhaltet, nur eine - subjektiv gefärbte - Auswahl getroffen werden (einige wichtige Gebiete, die wir aus Platzgründen nicht darstellen konnten, sind zum Abschluß des letzten Kapitels genannt). Die getroffene Auswahl erklärt sich zumindest teilweise daraus, daß dieser Text aus Vorlesungen entstanden ist, welche die Autoren an der RWTH Aachen und den Universitäten Berlin, Karlsruhe und Münster gehalten haben - sicherlich sind auch Einflüsse des akademischen Lehrers der beiden erstgenannten Autoren, Herrn Prof. Dr. D. Bierlein, erkennbar. An Vorkenntnissen wurde und wird der Stoff der üblichen mathematischen Anfänger-Vorlesungen bis zur Wahrscheinlichkeitstheorie vorausgesetzt.

Besonderen Dank möchten wir an dieser Stelle Fräulein Chr. Sudhaus aus Münster aussprechen, die den vorliegenden Text mit großer Sorgfalt niedergeschrieben hat, sowie Herrn Dr. N. Gaffke aus Aachen, der uns durch sein sorgfältiges Korrekturlesen unterstützt hat. Ebenso danken wir Frau E. Tummelley für die Anfertigung von Entwürfen zu zahlreichen Abschnitten.

Aachen und Münster im April 1979

B. Rauhut  
N. Schmitz  
E.-W. Zachow

## INHALT

I.	MATHEMATISCHE MODELLE FOR STRATEGISCHE SPIELE	9
§ 1	Verbale Beschreibung strategischer Spiele	9
§ 2	Strategien	15
§ 3	Auszahlungsfunktion	32
§ 4	Randomisierungsarten bei Spielen in extensiver Form	58
	Aufgaben	71
II.	GLEICHGEWICHTSPUNKTE	77
§ 1	Das Lösungskonzept der Gleichgewichtspunkte	77
§ 2	Existenzsätze für Gleichgewichtspunkte	82
§ 3	Anwendungen des Lösungskonzepts der Gleichgewichtspunkte	97
§ 4	Diskussion des Lösungskonzepts der Gleichgewichtspunkte	116
	Aufgaben	120
III.	ZWEIPERSONEN-NULLSUMMENSPIELE	123
§ 1	Reduktion von Zweipersonen-Nullsummenspielen	126
§ 2	Bayes- und Minimaxstrategien	133
§ 3	Definitheitskriterien	150
§ 4	Spiele über dem Einheitsquadrat	184
§ 5	Lösungsmethoden bei Matrixspielen	196
	Aufgaben	217



IV.	ZWEIPERSONEN-NICHTKONSTANTSUMMENSPIELE	225
	§ 1 Nichtkooperative Spiele	225
	§ 2 Kooperative Spiele; Verhandlungen ohne Drohungen	244
	§ 3 Kooperative Spiele; Verhandlungen mit Drohungen	292
	Aufgaben	303
V.	N-PERSONENSPIELE	307
	§ 1 Kooperative n-Personenspiele	308
	§ 2 Imputationen, Kern und von-Neumann-Morgenstern-Lösungen	336
	§ 3 Der Shapley-Wert	367
	§ 4 Schlußbemerkungen	391
	Aufgaben	393
	LITERATUR	395
	SACHVERZEICHNIS	398