RICHARD DEDEKIND

Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen

RICHARD DEDEKIND

Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen

Mit einem Geleitwort von

B. VAN DER WAERDEN

FRIEDR. VIEWEG & SOHN · BRAUNSCHWEIG 1964

Die vorliegende Ausgabe ist ein Nachdruck des Elften Supplements von DIRICHLETs Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Auflage, in den Fassungen XLVI bis XLIX nebst den Erläuterungen von E. Noether, entnommen aus Richard Dedekind, Gesammelte mathematische Werke, Dritter Band, Braunschweig 1932

ISBN 978-3-322-97993-3 ISBN 978-3-322-98606-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-98606-1

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1964

Geleitwort

Zur Rechtfertigung dieser Edition von *Dedekinds* berühmtem *elften Supplement* zu *Dirichlets* „Vorlesungen über Zahlentheorie“ kann ich keine besseren Worte finden als die von *Dedekind* selbst am Schluß seines Vorworts zur zweiten Auflage dieser „Vorlesungen“ (1871):

„Endlich habe ich mich bemüht, überall, wo es mir möglich war, auf die Quellen zu verweisen, um den Leser zum Studium der Originalwerke zu veranlassen und in ihm ein Bild von den Fortschritten der Wissenschaft zu erwecken, deren ebenso tiefe wie erhabene Wahrheiten einen Schatz bilden, welcher die unvergängliche Frucht eines wahrhaft edelen Wettkampfes der europäischen Völker ist.“

Das *elfte Supplement*, das zuerst in der dritten Auflage erschien, war eine Neufassung eines bedeutenden Abschnittes (§§ 159—170) des *zehnten Supplementes* der zweiten Auflage. Über diesen Abschnitt schreibt *Dedekind* im Vorwort zur zweiten Auflage:

„Endlich habe ich in dieses Supplement eine allgemeine Theorie der *Ideale* aufgenommen, um auf den Hauptgegenstand des ganzen Buches von einem höheren Standpunkte aus ein neues Licht zu werfen; hierbei habe ich mich freilich auf die Darstellung der Grundlagen beschränken müssen, doch hoffe ich, daß das Streben nach charakteristischen Grundbegriffen, welches in anderen Teilen der Mathematik mit so schönen Erfolgen gekrönt ist, mir nicht ganz mißglückt sein möge.“

Schon vor *Dedekind* hatte *Kronecker* eine Idealtheorie der algebraischen Zahlkörper entwickelt, aber die *Dedekind*sche Theorie ist unabhängig von der *Kronecker*schen entstanden. *Dedekind* fährt nämlich fort:

„Die Untersuchungen in diesem von *Kummer* geschaffenen Gebiete, welche *Kronecker* vor vierzehn Jahren angestellt hat, sind bis jetzt nicht veröffentlicht, und ich vermag nach den damaligen brieflichen Mitteilungen dieses ausgezeichneten Mathematikers nicht zu beurteilen, in welchen Beziehungen seine Prinzipien zu den meinigen stehen.“

Die *Dedekind*sche Idealtheorie in ihrer ursprünglichen Form ist in §§ 159—163 des zehnten Supplementes der zweiten Auflage von *Dirichlets* Zahlentheorie zum ersten Male dargestellt. Dieser Abschnitt ist als Abhandlung XLVII in die vorliegende Publikation aufgenommen.

In der französisch geschriebenen Abhandlung XLVIII vom Jahre 1877 hat *Dedekind* die Theorie nach seinen eigenen Worten „ausführlicher und in etwas veränderter Form dargestellt“. Die französische Abhandlung enthält viele Beispiele und hat dadurch mehr den Charakter einer elementaren Einführung. Der Aufbau des elften Supplementes der dritten Auflage ist aus der französischen Abhandlung übernommen. Ferner enthält die dritte Auflage ein Stück allgemeine Idealtheorie, nämlich die eindeutige Zerlegung der Ideale einer Ordnung in „einartige Ideale“. Dieses Stück ist als Abhandlung XLIX in die vorliegende Publikation aufgenommen. Ein Beweis, den *Dedekind* für die dritte Auflage kassiert hatte, wurde von *Emmy Noether* im Nachlaß gefunden und an der betreffenden Stelle wieder eingefügt.

Im elften Supplement der vierten Auflage (1894) hat *Dedekind* die Theorie ganz neu aufgebaut. Bei der Edition des dritten Bandes der gesammelten mathematischen Werke von *Dedekind* hat *Emmy Noether* die Fassung der vierten Auflage vollständig aufgenommen, während von den früheren Fassungen nur jeweils das dort nicht übernommene gebracht wurde. Diese vorzügliche Anordnung wurde in dieser Publikation beibehalten. Die Erläuterungen von *Emmy Noether* findet man am Schluß der Abhandlung XLIX.

Über die Entstehungsgeschichte des Supplementes zur 2. Auflage ist mir nicht mehr bekannt als das wenige, was *Dedekind* in seiner Abhandlung XV „Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Kongruenzen“ (Abh. Ges. Wiss. Göttingen **23**, 1878) mitteilt, nämlich:

„Die neuen Prinzipien, durch welche ich zu einer ausnahmelosen und strengen Theorie der Ideale gelangt bin, habe ich zuerst vor sieben Jahren in der zweiten Auflage der *Vorlesungen über Zahlentheorie von Dirichlet* (§§ 159—170) entwickelt und neuerdings in dem Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques (t. XI, p. 278; t. I (2e série), p. 17, 69, 144, 207) ausführlicher und in etwas veränderter Form dargestellt. Mit demselben Gegenstand hatte ich mich schon vorher, durch die große Entdeckung *Kummers* angeregt, eine lange Reihe von Jahren hindurch beschäftigt, wobei ich von einer ganz anderen Grundlage, nämlich von der Theorie der höheren Kongruenzen ausging; allein obgleich diese Untersuchungen mich dem erstrebten Ziele sehr nahe brachten, so konnte ich mich zu ihrer Veröffentlichung doch nicht entschließen, weil die so entstandene Theorie hauptsächlich an zwei Unvollkommenheiten leidet. Die eine besteht darin, daß die Untersuchung eines Gebietes von ganzen algebraischen Zahlen sich zunächst auf die Betrachtung einer bestimmten Zahl und der ihr entsprechenden Gleichung gründet, welche als Kongruenz aufgefaßt wird, und daß die so erhaltenen Definitionen der idealen Zahlen (oder vielmehr der Teilbarkeit durch die idealen Zahlen) zufolge dieser bestimmt gewählten Darstellungsform nicht von vornherein den Charakter der *Invarianz* erkennen lassen, welcher in Wahrheit diesen Begriff zukommt; die zweite Unvollkommenheit dieser Begründungsart besteht darin, daß bisweilen eigentümliche Ausnahmefälle auftreten, welche eine besondere Behandlung verlangen. Meine neuere Theorie dagegen gründet sich ausschließlich auf solche Begriffe, wie die des *Körpers*, der *ganzen Zahl*, des *Ideals*, zu deren Definition es gar keiner bestimmten Darstellungsform der Zahlen bedarf, und wie hierdurch der erstgenannte Mangel von selbst wegfällt, so bewährt sich die Kraft dieser äußerst einfachen Begriffe auch darin, daß bei dem Beweise der allgemeinen Gesetze der Teilbarkeit eine Unterscheidung mehrerer Fälle gar niemals mehr auftritt".

Über die Entstehung der definitiven Fassung des elften Supplementes in der vierten Auflage von 1894 und über die Beziehung der *Dedekind*schen Begründungen zur *Kronecker*schen. die im Frühjahr 1888 endlich publiziert wurde, weiß man viel mehr. *Dedekind* selbst hat nämlich in einer Abhandlung „Über die Begründung der Idealtheorie" (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1895, S. 106–113 = Werke II. S. 50–58) zu diesen Fragen Stellung genommen.

Das elfte *Supplement* von *Dedekind* hat in seinen drei Fassungen eine nachhaltige Wirkung ausgeübt. Es markiert einen Wendepunkt in der Geschichte der Zahlentheorie und der Algebra. Der 1897 in Bd. 4 des Jahresberichtes der D.M.V. erschienene „Zahlbericht" von *Hilbert* zeigt, wie sich die Theorie der algebraischen Zahlkörper auf dem von *Dedekind* geschaffenen Fundament in kurzer Zeit zu einer erstaunlichen Höhe entwickelt hat. Für *Emmy Noether* war das elfte Supplement eine unerschöpfliche Quelle von Anregungen und Methoden. Bei jeder Gelegenheit pflegte sie zu sagen „Es steht schon bei *Dedekind*".

Evariste Galois und *Richard Dedekind* sind es, die der modernen Algebra ihre Struktur gegeben haben. Das tragende Skelett dieser Struktur stammt von ihnen.

Zürich. 1. November 1963 *B. L. van der Waerden*

Inhaltsverzeichnis

XLVI. Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen

(Supplement XI von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl., S. 434—657 (1894).)

XLVII. Über die Komposition der binären quadratischen Formen

(Supplement X von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, 2. Aufl., S. 423—462 (1871).)

XLVIII. Sur la Théorie des Nombres entiers algébriques

(Paris, Gauthier-Villars, 1877, S. 1—121. Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, 1[re] série, t. XI, 2[e] série, t. I., 1876, 1877.)

XLIX. Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen

(Supplement XI von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, 3. Aufl., S. 515—530 (1879).)