

Gerhard Opfer

**Numerische Mathematik  
für Anfänger**

**vieweg studium**  
**Grundkurs Mathematik**

Gerd Fischer  
**Lineare Algebra**

Hannes Stoppel/ Birgit Griese  
**Übungsbuch zur Linearen Algebra**

Gerd Fischer  
**Analytische Geometrie**

Otto Forster  
**Analysis 1**

Otto Forster/ Rüdiger Wessoly  
**Übungsbuch zur Analysis 1**

Otto Forster  
**Analysis 2**

Otto Forster/ Thomas Szymczak  
**Übungsbuch zur Analysis 2**

Ernst Kunz  
**Ebene Geometrie**

Gerhard Opfer  
**Numerische Mathematik für Anfänger**

Gerhard Opfer

# **Numerische Mathematik für Anfänger**

Eine Einführung für Mathematiker,  
Ingenieure und Informatiker

3., überarbeitete und erweiterte Auflage

Mit zahlreichen Abbildungen, Beispielen  
und Programmen



Prof. Dr. Gerhard Opfer  
Fachbereich Mathematik  
Universität Hamburg  
Bundesstraße 55  
20146 Hamburg  
E-mail: [opfer@math.uni-hamburg.de](mailto:opfer@math.uni-hamburg.de)

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme  
Ein Titeldatensatz für diese Publikation ist bei  
Der Deutschen Bibliothek erhältlich.

1. Auflage Dezember 1992
2. Auflage August 1994
3. Auflage Mai 2001

Alle Rechte vorbehalten  
© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH,  
Braunschweig/Wiesbaden, 2001

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe  
BertelsmannSpringer.



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

[www.vieweg.de](http://www.vieweg.de)

Konzeption und Layout des Umschlags: Ulrike Weigel,  
[www.CorporateDesignGroup.de](http://www.CorporateDesignGroup.de)

Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN 978-3-528-27265-4      ISBN 978-3-322-96948-4 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-322-96948-4

# Vorwort

Das nachfolgende Manuskript ist hervorgegangen aus Vorlesungen über Numerische Mathematik an der Universität Hamburg, die sich an Studienanfänger richtet. In Hamburg vertritt man seit über zehn Jahren das Konzept, Studienanfängern des Studiengangs Mathematik bereits im ersten Semester parallel zu Analysis und Linearer Algebra Numerische Mathematik anzubieten.

Das Besondere an der Numerischen Mathematik ist, daß man durch Lesen allein nicht genug lernt. Das Wesentliche ist neben dem Nachvollziehen der Theorie das selbständige Durchrechnen von Beispielen und zwar „mit der Hand“ (kleine, in der Regel pädagogische Beispiele) und mit einem Computer. Nur so kann man die besonderen Phänomene der Numerischen Mathematik erfassen.

Das Hauptaugenmerk sollte man immer auf zwei Punkte richten, nämlich was kostet ein Algorithmus und wie stabil verhält er sich. Die Kosten kann man am objektivsten abschätzen durch die Anzahl der benötigten Operationen. Stabilität bedeutet Unempfindlichkeit gegen leicht gestörte Daten, die z. B. durch fast immer auftretende Rundungsfehler unvermeidbar sind. Die Frage nach der Stabilität kann im Rahmen dieses Textes häufig nur andeutungsweise behandelt werden.

Bei der Zählung der Operationen werden häufig nur die Multiplikationen/Divisionen (kurz: Mult/Div, auch *wesentliche Operationen* genannt) gezählt und die Additionen/Subtraktionen (kurz: Add/Sub) dabei vernachlässigt, weil in vielen Rechenanlagen für eine Mult/Div wesentlich mehr Zeit gebraucht wird als für eine Add/Sub. Die Anzahl der wesentlichen Operationen nennt man auch *Ostrowski-Count*. In neuerer Zeit geht man allerdings dazu über, die Mult/Div und Add/Sub zusammenzuzählen. Das Zählergebnis wird in aller Regel *flops* ([engl.] *floating point operations*) genannt.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß ein weiterer Aspekt immer wichtiger werden wird. Nämlich die Frage, ob ein Algorithmus parallelisiert werden kann. Dazu muß man wissen, daß neuere Computer in der Lage sind (oder sein werden), einige oder sogar sehr viele Operationen gleichzeitig auszuführen. Parallelisierung bedeutet, daß ein Algorithmus so formuliert wird, daß er von diesen Möglichkeiten Gebrauch machen kann. Hinweise dazu sind vorhanden in SCHA-BACK & WERNER [1992].

Um die angesprochene Übertragung eines Algorithmus auf einen Computer möglich zu machen, bedarf es einer Programmiersprache. Für Unterrichtszwecke hat sich das von dem Schweizer WIRTH [1971] veröffentlichte *Pascal* als sehr zweckmäßig herausgestellt. Diese Sprache erlaubt insbesondere strukturiertes Programmieren (d. h. Aufteilen in kleine, überschaubare, für sich verständliche Teile). Die Literatur über Pascal ist sehr reichhaltig. Es werde hingewiesen auf Bücher von BERNHUBER ET ALII [1988], HERSCHEL [1986] und nicht im Buchhandel erhältliche Handbücher von HEIMSOETH & BORLAND über Turbo-Pascal.

Nach längerer Erfahrung mit Pascal wird man feststellen, daß gewisse Routine-Operationen (z. B. das Aufsummieren von Zahlen, oder das Zeichnen eines Funktionsgraphen) sehr mühsam sind. Hier ist eine neuere von dem Amerikaner MOLER angegebene Sprache MATLAB sehr nützlich, die auch hier, insbesondere bei der Herstellung der meisten Zeichnungen Verwendung gefunden hat (MOLER, ULLMAN, LITTLE & BANGERT [1987]). Es ist allerdings zu bemerken, daß die Strukturierungsmöglichkeiten in MATLAB eingeschränkt sind.

Den Lesern dieses Textes wird empfohlen, den gleichen Stoff parallel in der (normalerweise nicht für Anfänger konzipierten) Literatur zu studieren, z. B. in den Büchern von MAESS [1985, 1988], PRESS ET ALII [1986], SCHMEISSER & SCHIRMEIER [1976], SCHWARZ [1997], STOER [1999]. Weitere Hinweise auf die Literatur sind im Text eingestreut.

Ein erstes Manuskript nach dem angegebenen Konzept wurde von C. Maas geschrieben. Das ist an verschiedenen Stellen im vorliegenden Text noch zu erkennen. Viele nützliche Anregungen und Hilfestellungen von B. Fischer, C. Geiger, U. Grothkopf, W. Hofmann, J. Modersitzki, Gu. Opfer, P. Stork, H. Voß, P. Weidner, B. Werner und Q. Zheng sind verwendet worden. Das vorliegende Manuskript wurde in seiner ersten Fassung von U. Gehrke in  $\LaTeX$  geschrieben. S. Loges hat bei der Bewältigung  $\TeX$ nischer Schwierigkeiten des umfangreichen Manuskripts wertvolle Hilfe geleistet.

Hamburg, im September 1992

G. O.

### Vorwort zur dritten Auflage

Gegenüber der zweiten Auflage sind nicht nur bekannt gewordene Fehler korrigiert, sondern an einigen Stellen auch Ergänzungen vorgenommen worden. In Kapitel 3 über Interpolation gibt es jetzt einen neuen Abschnitt über *radiale Funktionen*. Das sind Funktionen, die sich besonders gut zur Interpolation von unregelmäßig verteilten Daten in mehreren Dimensionen eignen, wie sie z. B. bei der Herstellung von topographischen Karten vorkommen. Im selben Kapitel ist der

Abschnitt über Splines herausgelöst, um einen solchen zum Thema B-Splines erweitert und zu einem neuen Kapitel 4 über Splines zusammengefaßt worden. Bei der Behandlung der B-Splines bin ich von der traditionellen Definition über die dividierten Differenzen der abgeschnittenen Potenzen abgewichen und habe als Definition die bekannte Rekursionsformel benutzt. Das hat große Vorteile: Man kann die B-Splines sofort zu beliebigen Knotenfolgen mit einem effektiven Algorithmus berechnen und entsprechend visualisieren. Der Nachweis der entsprechenden Glattheit an den Knoten erfolgt dann über eine Identität von MARSDEN [1970]. Dabei ist eine Idee von DE BOOR & HÖLLIG [1987] verfolgt worden, die in einem Artikel von DE BOOR [1996] noch einmal sehr liebevoll aufgearbeitet wurde. Im letzten Kapitel über nichtlineare Gleichungen sind die eindimensionalen Probleme etwas besser strukturiert worden. Das Farbbild zum Newton-Verfahren mußte aus Kostengründen einem Schwarzweiß-Bild weichen.

Es haben mich wieder Kollegen und auch Studierende auf mögliche Verbesserungsvorschläge hingewiesen, für die ich an dieser Stelle herzlich danke. Erwähnen möchte ich besonders den am 14. Mai 2000 verstorbenen Jochen W. Schmidt aus Dresden, der mir besonders im Spline-Bereich viele Hinweise gegeben hat. Dann sind zu nennen die Hamburger Kollegen Carl Geiger und Bodo Werner, die mir ihre umfangreichen Erfahrungen anläßlich der Benutzung des Buches in verschiedenen Kursen über Numerische Mathematik mitgeteilt haben. Auch möchte ich den Studenten Dieter Baldenius erwähnen, der viele kleine „Fehlerchen“ entdeckt hat.

Ich habe auch wieder, wenn auch nicht systematisch bibliographische Hinweise auf die im Text erwähnten Mathematikerinnen und Mathematiker eingefügt. Es ist dabei aber nicht möglich, mit den heute vorhandenen Informationsdiensten, z. B. mit

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/>

zu konkurrieren. Diese Internetseiten enthalten ausführliche Biographien vieler Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler. Trotzdem wird man selbst dort besonders im Bereich der angewandten Mathematik viele Lücken entdecken.

Die Abbildungen und die Rechnungen sind zum größten Teil mit MATLAB, Version 5.3 hergestellt und der Text vom Autor in der ihm gewohnten Rechtschreibung mit einer neueren L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Variante geschrieben worden.

Hamburg, im März 2001

G. O.

# Inhaltsverzeichnis

Liste der Beispiele . . . . .	xi
Liste der Tabellen . . . . .	xiv
Liste der Figuren . . . . .	xvi
Liste der Programme . . . . .	xvii
<b>1 Zahldarstellung und Rundungsfehler</b>	<b>1</b>
1.1 Maschinenzahlen . . . . .	1
1.1.1 Relativer und absoluter Fehler . . . . .	1
1.1.2 Gleitpunktdarstellung . . . . .	2
1.2 Fehler beim Rechnen . . . . .	5
1.3 Aufgaben . . . . .	10
<b>2 Auswertung elementarer Funktionen</b>	<b>13</b>
2.1 Gewöhnliche Polynome . . . . .	13
2.2 Trigonometrische Polynome . . . . .	19
2.3 Rationale Funktionen . . . . .	28
2.4 Aufgaben . . . . .	34
<b>3 Interpolation</b>	<b>37</b>
3.1 Polynom-Interpolation . . . . .	37
3.1.1 Fehler der Interpolation . . . . .	47
3.1.2 Hermite-Interpolation . . . . .	52
3.1.3 Fehler der Hermite-Interpolation . . . . .	59
3.2 Trigonometrische Interpolation . . . . .	60
3.3 Interpolation in linearen Räumen . . . . .	65
3.3.1 Radiale Funktionen . . . . .	69
3.4 Rationale Interpolation . . . . .	73
3.5 Aufgaben . . . . .	79



<b>4</b>	<b>Splines</b>	<b>85</b>
4.1	Einführung . . . . .	85
4.2	Lineare Splines . . . . .	89
4.3	Quadratische Splines . . . . .	92
4.4	Kubische Splines . . . . .	96
4.5	Lokale Splines . . . . .	98
4.6	B-Splines . . . . .	100
4.6.1	Rekursive Definition der B-Splines . . . . .	101
4.6.2	Der von den B-Splines aufgespannte Raum $S_{k,t}$ . . . . .	105
4.6.3	Stückweise polynomiale Funktionen in $S_{k,t}$ . . . . .	108
4.6.4	B-Splines auf einem Intervall . . . . .	110
4.6.5	Auswertung von Splines in $S_{k,t}$ und die Berechnung der Ableitung . . . . .	111
4.6.6	Interpolation mit B-Splines in $S_{k,t}$ . . . . .	114
4.6.7	B-Splines als CAD-Werkzeug . . . . .	117
4.7	Aufgaben . . . . .	121
<b>5</b>	<b>Numerische Integration</b>	<b>124</b>
5.1	Interpolatorische Formeln . . . . .	125
5.2	Zusammengesetzte Formeln . . . . .	130
5.3	Konvergenzuntersuchungen . . . . .	132
5.4	Extrapolation und Adaption . . . . .	133
5.5	Gauß-Quadratur . . . . .	138
5.6	Integration singulärer Funktionen . . . . .	149
5.6.1	Regularisierung . . . . .	150
5.6.2	Anwendung der Gauß-Quadratur . . . . .	151
5.7	Aufgaben . . . . .	152
<b>6</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>156</b>
6.1	Aufgabenstellung . . . . .	156
6.1.1	Matrizen . . . . .	158
6.2	Das Gaußsche Eliminationsverfahren . . . . .	162
6.2.1	Pivotsuche . . . . .	168
6.2.2	Gauß-Variationen, Cholesky-Zerlegung . . . . .	173
6.2.3	Mehrere rechte Seiten . . . . .	177
6.3	Iterative Lösungsverfahren . . . . .	179
6.4	Methode der konjugierten Gradienten . . . . .	184
6.5	Aufgaben . . . . .	194

<b>7</b>	<b>Lineare Optimierung</b>	<b>200</b>
7.1	Aufgabenstellung	200
7.2	Basisvektoren	204
7.3	Das Simplexverfahren	205
7.4	Praktische Durchführung	210
7.5	Modifikationstechniken	215
7.6	Aufgaben	220
<b>8</b>	<b>Ausgleichs- und Approximationsprobleme</b>	<b>225</b>
8.1	Normen von Vektoren und linearen Abbildungen	225
8.2	Lineare Approximation	233
8.3	Überbestimmte Gleichungssysteme	240
8.3.1	Ausgleichung im quadratischen Mittel	240
8.3.2	Householder-Transformationen, QR-Zerlegungen	246
8.3.3	Herstellung einer Bidiagonalform	253
8.3.4	Ausgleichung in der Summen- und Maximumnorm	255
8.4	Approximation von Funktionen	256
8.4.1	Tschebyscheff-Approximation	256
8.4.2	Approximation von Funktionen in der $L_2$ -Norm	262
8.5	Aufgaben	265
<b>9</b>	<b>Matrizeigenwerte und -eigenvektoren</b>	<b>269</b>
9.1	Aufgabenstellung und elementare Eigenschaften	269
9.2	Das von-Mises-Verfahren (Potenzmethode)	282
9.3	Die inverse von-Mises-Iteration	283
9.4	Der QR-Algorithmus	284
9.5	Der Lanczos-Algorithmus	286
9.6	Berechnung der Singulärwerte	288
9.7	Beispiele	292
9.7.1	Von-Mises-Verfahren	294
9.7.2	Inverses von-Mises-Verfahren	294
9.7.3	QR-Verfahren	295
9.7.4	Lanczos-Algorithmus	296
9.7.5	Singulärwertberechnung	297
9.8	Aufgaben	298

<b>10 Nichtlineare Gleichungen und Systeme</b>	<b>300</b>
10.1 Aufgabenstellung	300
10.2 Hilfsmittel aus der Analysis	302
10.3 Fixpunktiterationen	305
10.4 Das Newton-Verfahren	311
10.5 Konvergenz für lineare Probleme	318
10.6 Eindimensionale Probleme	320
10.6.1 Bisektion	321
10.6.2 Regula falsi	322
10.6.3 Sekantenverfahren	323
10.6.4 Das vereinfachte Sekantenverfahren	324
10.6.5 Fixpunktverfahren	325
10.6.6 Das Newton-Verfahren für eine Dimension	326
10.6.7 Nullstellen von Polynomen	327
10.7 Aufgaben	331
<b>Anhang: Alphabete</b>	<b>335</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>336</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>341</b>

**Hinweis:** Die Beispiele, Tabellen, ..., Sätze, Definitionen etc. sind in jedem Kapitel einheitlich durchnummeriert, mit vorangestellter Kapitelnummer. Dasselbe gilt für die Formelnummern, für die nach gleichem Muster eine separate Durchnummerierung existiert. Die (Unter-) Abschnittsnummern werden also nicht in das Nummerierungssystem übernommen.

## Liste der Beispiele

1.4 Maschinendarstellung von Binärzahlen	4
2.7 Auswertung eines Polynoms mit Horner-Schema	16
2.10 Horner-Schema zur Umrechnung in andere Zahldarstellungen	16
2.12 Vorkommen von Polynomen	17
2.16 Schnelle Fouriertransformation für $N = 4$	24
2.21 Division von Polynomen	28
2.22 Wiederholte Division von Polynomen	29

3.7	Einfache Interpolationspolynome . . . . .	39
3.19	Inverse Interpolation mit Hilfe des Neville-Schemas . . . . .	44
3.22	Bestimmung eines Interpolationspolynoms durch vier Punkte mit verschiedenen Methoden . . . . .	45
3.34	Hermite-Interpolation mit Doppelknoten . . . . .	54
3.42	Hermite-Interpolation mit zwei Knoten . . . . .	60
3.48	Trigonometrische Interpolation der Wurzel . . . . .	65
3.49	Unlösbarkeit von Interpolationsproblemen . . . . .	65
3.56	Radiale Funktionen . . . . .	70
3.57	Radiale Matrix . . . . .	70
3.59	Lineare Splines . . . . .	71
3.61	Interpolation durch rationale Funktionen . . . . .	73
3.68	Pole bei der rationalen Interpolation . . . . .	77
3.69	Vergleich rationaler mit polynomialer Interpolation . . . . .	78
4.1	Interpolationsfehler von $\sqrt{ t }$ in $[-1, 1]$ . . . . .	86
4.4	Interpolation durch einen linearen Spline . . . . .	89
4.6	Quadratischer Interpolationsspline . . . . .	94
4.9	Kubische Splineinterpolation . . . . .	98
4.12	Lokale, lineare, quadratische, kubische Splines . . . . .	99
4.14	Interpolation von $t \sin(1/t)$ mit lokalem, kubischem Spline . . . . .	100
4.19	Bernstein-Polynome als B-Splines . . . . .	104
4.28	Lokaler Charakter von B-Spline-Summen . . . . .	113
4.33	Quadratische Splineinterpolation mit B-Splines . . . . .	116
4.35	Kubische Splineinterpolation mit B-Splines . . . . .	117
4.42	Zeichnen von Bézier-Kurven mit verschiedenen B-Splines . . . . .	121
5.2	Integrationsformeln für einen bis vier Knoten . . . . .	126
5.6	Ordnung der Rechtecksregel . . . . .	127
5.7	Ordnung der Simpson-Regel . . . . .	128
5.12	Abschätzung des Quadraturfehlers . . . . .	129
5.26	Gauß-Tschebyscheff-Formeln . . . . .	145
5.27	Gauß-Quadraturformel der Ordnung Vier . . . . .	147
5.28	Dreitermrekursion für stückweise lineares Gewicht . . . . .	148
5.30	Integration einer singulären Funktion . . . . .	150

5.32	Integration einer singulären Funktion mit Gauß-Quadratur . . . . .	151
6.1	Produktionsmodell von Leontief . . . . .	156
6.6	Links-Rechts-Zerlegungen im Vergleich . . . . .	169
6.7	Lösung eines linearen Gleichungssystems . . . . .	170
6.9	Kleines Residuum und großer Fehler . . . . .	172
6.12	Verschiedene Dreieckszerlegungen . . . . .	176
6.15	$\text{diag } \mathbf{A}, \mathbf{A}_L, \mathbf{A}_R$ für $n = 2$ . . . . .	181
6.17	Anwendung des GSV und ESV . . . . .	183
6.29	Vandermonde-Matrix . . . . .	192
6.30	Modellproblem . . . . .	193
7.1	Ernährungsplan . . . . .	200
7.2	Umwandlung von Nebenbedingungen . . . . .	202
7.16	Lösung eines linearen Optimierungsproblems . . . . .	213
7.18	Modifikationstechniken . . . . .	219
8.3	Normen in endlich-dimensionalen Räumen . . . . .	226
8.4	Normen in Funktionenräumen . . . . .	227
8.12	Normen von Matrizen und Matrixnormen . . . . .	231
8.13	Kondition einer $2 \times 2$ -Matrix . . . . .	232
8.15	Tschebyscheff-Approximation . . . . .	234
8.16	Approximation in $L_1$ . . . . .	234
8.17	Periodische Schwingungen . . . . .	234
8.20	Nichtexistenz von besten Approximationen . . . . .	235
8.21	Mehrere beste Approximationen . . . . .	236
8.22	Datenapproximation . . . . .	236
8.26	$L_2$ als Vektorraum mit Skalarprodukt . . . . .	238
8.30	Approximation durch eine Gerade . . . . .	240
8.38	Lineare Regression . . . . .	244
8.49	QR-Zerlegung für einen einzigen Vektor . . . . .	250
8.51	Householder-Verfahren, Lösung eines linearen Gleichungssystems . . . . .	252
8.55	Bidiagonalform . . . . .	254
8.56	Berechnung der Quadratwurzel . . . . .	256
8.61	Approximation der Monome $t^n$ . . . . .	262

8.63	Gram-Schmidt-Verfahren . . . . .	264
9.1	Eulerscher Knickstab . . . . .	269
9.2	Schwingende Saite . . . . .	269
9.6	Dimension von Eigenräumen . . . . .	273
9.8	Eigenwerte einer Diagonalmatrix . . . . .	273
9.20	Singulärwertzerlegung eines Vektors . . . . .	279
9.27	Instabile Produktbildung $\mathbf{B}^* \mathbf{B}$ . . . . .	289
9.29	von-Mises-Verfahren, verschiedene Beispiele . . . . .	294
9.33	Singulärwerte einer reellen Matrix . . . . .	297
9.34	Singulärwerte einer komplexen Matrix . . . . .	297
10.8	Konvergenzordnung . . . . .	304
10.9	Eintauchtiefe eines Holzstammes . . . . .	305
10.11	Fixpunktiteration mit zwei Variablen . . . . .	306
10.13	Fixpunktiteration für $f(x) := x^2$ . . . . .	306
10.18	Kontraktionssatz für eine Dimension . . . . .	309
10.19	Kontraktionssatz für zwei Dimensionen . . . . .	310
10.22	Allgemeines zweidimensionales Newton-Verfahren . . . . .	312
10.24	Nullstellen der komplexen Funktion $g(z) := e^z - z$ . . . . .	313
10.28	Einzugsbereiche des Newton-Verfahrens für $g(x) := x^3 + i = 0$ . . . . .	316
10.34	Bisektion für $g(x) := \Gamma(x) - x$ . . . . .	321
10.36	Regula falsi für $g(x) := \Gamma(x) - x$ . . . . .	322
10.38	Sekantenverfahren für $g(x) := \Gamma(x) - x$ . . . . .	323
10.40	Vereinfachtes Sekantenverfahren für $g(x) := \Gamma(x) - x$ . . . . .	325
10.42	Zyklen im Newton-Verfahren . . . . .	326
10.47	Nullstellen komplexer Polynome . . . . .	329
10.49	Untere Schranken für Polynomnullstellen . . . . .	330
10.51	Obere Schranken für Polynomnullstellen . . . . .	330

## Liste der Tabellen

1.1	Gleitpunktdarstellung verschiedener Dezimalzahlen . . . . .	3
1.2	Maschinenzahlen mit zweistelliger Mantisse . . . . .	3

1.5	Relative Fehler von dreistelligen Dualzahlen . . . . .	5
2.8	Horner-Schema für $p_3(2)$ aus Beispiel 2.7 . . . . .	16
2.11	Umrechnung der Dezimalzahl 389 in eine Binärzahl . . . . .	17
2.13	Gewinne aus Maschinenkauf . . . . .	17
2.14	Verzinsung nach Maschinenkauf . . . . .	18
2.15	Schnelle Fouriertransformation für $N = 8$ . . . . .	23
2.17	Daten des Fourierpolynoms . . . . .	24
2.18	Schnelle Auswertung eines Fourierpolynoms . . . . .	25
2.24	Ergebnisse aus dem Kettenbruchprogramm 2.25 . . . . .	32
3.11	Schema der dividierten Differenzen . . . . .	42
3.12	Neville-Schema . . . . .	42
3.20	Neville-Schema zur inversen Interpolation . . . . .	45
3.23	Dividierte Differenzen für $(0, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 2)$ . . . . .	46
3.24	Neville-Formel . . . . .	46
3.25	Aitken-Formel . . . . .	47
3.35	Hermite-Interpolation der Daten (3.37) . . . . .	55
3.46	Trigonometrische Interpolation der Wurzel für $N = 16$ . . . . .	64
3.52	Beispiele von Haarschen Räumen . . . . .	67
3.58	Funktionen $g$ , die nicht-singuläre radiale Matrizen $M$ definieren . . . . .	71
4.2	Fehler $\varepsilon_{n-1}$ und Fehlerordnung $\alpha$ bei $n$ Knoten . . . . .	86
4.5	Dividierte Differenzen für quadratische Splines . . . . .	93
4.8	Dividierte Differenzen für kubische Splines . . . . .	96
4.34	Interpolations- und Splineknoten für einen quadratischen Spline . . . . .	117
5.18	Ergebnisse adaptives Simpson mit berechneten Knoten . . . . .	137
5.24	Orthogonale Polynome für verschiedene Gewichte $\gamma$ . . . . .	143
5.29	Orthogonale Polynome $q$ , Knoten $x$ , Gewichte $w$ bei Gewichtsfunktion (5.49) . . . . .	149
5.31	Berechnung von $I(f) = \int_0^1 \cos xx^{-0.5} dx$ mit der Trapezregel ohne und mit Abziehen der Singularität und mit Gauß-Integration . . . . .	151
6.3	Übersicht über Matrix-Notationen . . . . .	163
6.13	Operationszahlen bei der Gauß-Elimination . . . . .	178

6.18	GSV und ESV für Beispiel 6.17 mit $\varepsilon^k = \max_{i=1,2,3}  x_i^{k-1} - x_i^k $ . . .	183
6.31	Operationszahlen für das Gaußsche Eliminationsverfahren bei kleinen $n$ .	198
8.8	Vektor- und zugehörige Operatornorm . . . . .	229
9.5	Lösungen der diskretisierten Eigenwertaufgabe (9.4) . . . . .	272
9.30	von-Mises-Iteration . . . . .	294
9.31	Inverse von-Mises-Iteration . . . . .	294
10.10	Werte $\alpha_{k+1} = \sin \alpha_k + 1.32\pi$ . . . . .	306
10.14	Fixpunktiteration für $z := x + iy = \log z$ mit Fehlerabschätzungen . .	307
10.25	Newton-Verfahren für $g(z) := e^z - z = 0$ . . . . .	314
10.35	Bisektionsverfahren für $g(x) := \Gamma(x) - x$ . . . . .	322
10.37	Regula falsi für $g(x) := \Gamma(x) - x$ . . . . .	323
10.39	Sekantenverfahren für $g(x) := \Gamma(x) - x$ . . . . .	324
10.41	Vereinfachtes Sekantenverfahren für $g(x) := \Gamma(x) - x$ . . . . .	325
10.52	Beispiele zur Nullstellenbestimmung . . . . .	333

## Liste der Figuren

3.21	Zur inversen Interpolation, Beispiel 3.19 . . . . .	45
3.29	Knotenpolynom $\omega$ aus (3.21) für $n = 12$ mit äquidistanten und Tschebyscheffknoten (gestrichelt) . . . . .	49
3.33	Straßenlaterne mit parabelförmigem Bogen . . . . .	53
3.47	Trigonometrische Interpolation der Wurzel, Fehler rechts . . . . .	64
3.54	Drei Kurven $S_1, S_2, S_3$ und die entsprechenden Verschiebungen . . . . .	69
3.60	Radiale Interpolation durch die vier Punkte $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ .	72
3.70	Fehler der polynomialen und rationalen Interpolation von $\tan$ in $[0, 1.5]$ mit 5 äquidistanten Punkten . . . . .	79
4.7	Interpolation mit einem quadratischen Spline, rechts Ausschnitt . . . . .	95
4.10	Kubische Splineinterpolation, natürlicher und vollständiger Spline . . . . .	98
4.15	Kubische, lokale Spline-Interpolation (gestrichelt) von $t \sin(1/t)$ . . . . .	100
4.17	Quadratischer B-Spline mit seinen drei Polynomstücken . . . . .	103
4.27	Zwei Splines mit unterschiedlichem Koeffizienten $a_5$ , Knoten von 1 bis 14 numeriert . . . . .	112



4.37	Konstruktion von Bézier-Kurven mit dem de Casteljau-Algorithmus . . .	119
4.40	Geschlossene Bézier-Kurven der Ordnungen 2, 3, 4, 6, 9 . . . . .	120
5.1	Integration über ein Intervall $[a, b]$ und über einen zweidimensionalen Bereich $R$ . . . . .	124
5.16	$\tilde{I}_{h/2}$ als extrapolierter Wert aus $I_h$ und $I_{h/2}$ . . . . .	134
6.21	Zickzackweg beim Verfahren des steilsten Abstiegs . . . . .	186
8.18	Verschiedene Schwingungsformen . . . . .	235
8.19	Verschiedene beste Approximationen der Rechtecksschwingung . . . . .	235
8.28	Projektion $\hat{v}$ von $f$ auf $V$ . . . . .	239
8.31	Auslenkung einer Spiralfeder und durchhängende Kette . . . . .	241
8.32	Fallstrecke $s$ in Abhängigkeit von der Fallzeit $t$ . . . . .	241
8.60	Alte Knoten $t_j$ ( $\times$ ) und neue Knoten $t'_j$ ( $\circ$ ) beim Remez-Algorithmus am Beispiel von $f(x) = \exp(-x^2)$ und $V = \Pi_5$ . . . . .	261
9.3	Saitenschwingung und Knickstab (gestrichelt) für $j = 1, 2, 3, 4$ . . . . .	271
9.32	Größe und kleinste Ritz-Werte bei äquidistanten und zwei gehäuften Eigenwerten . . . . .	297
10.1	Schnittpunkte von $f(x) := \tan(x)$ und $g(x) := -(x - \pi/2)^2 + 3$ . . .	301
10.23	Newton-Verfahren und Linearisierung . . . . .	313
10.29	Drei Einzugsbereiche eines Newton-Verfahrens in $[-1, 1] \times [-1, 1]$ . .	317
10.30	Anzahl der Schritte eines Newton-Verfahrens in $[-1, 1] \times [-1, 1]$ . . .	317
10.53	Berechnung des Kreisradius aus Sehne und Bogenlänge . . . . .	334

## Liste der Programme

1.6	Zahlbereichsüberlauf . . . . .	5
1.7	Abfrage auf Gleichheit . . . . .	6
2.9	Horner-Schema für alle Ableitungen . . . . .	16
2.19	FFT mit Bit-Umkehr und Aufruf-Teil . . . . .	25
2.25	Herstellung eines Kettenbruchs . . . . .	32
3.13	Dividierte Differenzen mit Neville-Reihenfolge . . . . .	43

---

3.15	Neville-Algorithmus . . . . .	43
3.16	Aitken-Algorithmus . . . . .	43
3.18	Dividierte-Differenzen mit Aitken-Reihenfolge . . . . .	44
3.67	Dividierte inverse, dividierte Differenzen, Kettenbruch und Newton-Polynom (MATLAB-Programm) . . . . .	77
4.36	de Casteljau-Algorithmus . . . . .	118
5.17	Pascal-Programm zur adaptiven Simpson-Integration . . . . .	136
6.4	Pascal-Programm Gaußsches Eliminationsverfahren . . . . .	167
6.14	Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen beim Eliminationsverfahren . . . . .	179
8.52	Funktion <code>househ</code> zur Herstellung von Householder-Vektoren . . . . .	253
8.53	Herstellung einer Dreiecksmatrix mit dem Householder-Verfahren . . . . .	253
8.54	MATLAB-Programm zur Bidiagonalisierung einer Matrix . . . . .	254
9.28	Berechnung von Singulärwerten . . . . .	289