Gerhard Opfer

Numerische Mathematik für Anfänger

vieweg studium

Grundkurs Mathematik

Gerd Fischer

Lineare Algebra

Hannes Stoppel / Birgit Griese

Übungsbuch zur Linearen Algebra

Gerd Fischer

Analytische Geometrie

Otto Forster

Analysis 1

Otto Forster / Rüdiger Wessoly

Übungsbuch zur Analysis 1

Otto Forster

Analysis 2

Otto Forster / Thomas Szymczak

Übungsbuch zur Analysis 2

Ernst Kunz

Ebene Geometrie

Gerhard Opfer

Numerische Mathematik für Anfänger

vieweg

Gerhard Opfer

Numerische Mathematik für Anfänger

Eine Einführung für Mathematiker, Ingenieure und Informatiker

3., überarbeitete und erweiterte Auflage

Mit zahlreichen Abbildungen, Beispielen und Programmen

vieweg

Prof. Dr. Gerhard Opfer
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Bundesstraße 55
20146 Hamburg
E-mail: opfer@math.uni-hamburg.de

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme
Ein Titeldatensatz für diese Publikation ist bei
Der Deutschen Bibliothek erhältlich.

1. Auflage Dezember 1992
2. Auflage August 1994
3. Auflage Mai 2001

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe
BertelsmannSpringer.

www.vieweg.de

Konzeption und Layout des Umschlags: Ulrike Weigel,
www.CorporateDesignGroup.de

Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN 978-3-528-27265-4 ISBN 978-3-322-96948-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-96948-4

Vorwort

Das nachfolgende Manuskript ist hervorgegangen aus Vorlesungen über Numerische Mathematik an der Universität Hamburg, die sich an Studienanfänger richtet. In Hamburg vertritt man seit über zehn Jahren das Konzept, Studienanfängern des Studiengangs Mathematik bereits im ersten Semester parallel zu Analysis und Linearer Algebra Numerische Mathematik anzubieten.

Das Besondere an der Numerischen Mathematik ist, daß man durch Lesen allein nicht genug lernt. Das Wesentliche ist neben dem Nachvollziehen der Theorie das selbständige Durchrechnen von Beispielen und zwar „mit der Hand“ (kleine, in der Regel pädagogische Beispiele) und mit einem Computer. Nur so kann man die besonderen Phänomene der Numerischen Mathematik erfassen.

Das Hauptaugenmerk sollte man immer auf zwei Punkte richten, nämlich was kostet ein Algorithmus und wie stabil verhält er sich. Die Kosten kann man am objektivsten abschätzen durch die Anzahl der benötigten Operationen. Stabilität bedeutet Unempfindlichkeit gegen leicht gestörte Daten, die z. B. durch fast immer auftretende Rundungsfehler unvermeidbar sind. Die Frage nach der Stabilität kann im Rahmen dieses Textes häufig nur andeutungsweise behandelt werden.

Bei der Zählung der Operationen werden häufig nur die Multiplikationen/Divisionen (kurz: Mult/Div, auch *wesentliche Operationen* genannt) gezählt und die Additionen/Subtraktionen (kurz: Add/Sub) dabei vernachlässigt, weil in vielen Rechenanlagen für eine Mult/Div wesentlich mehr Zeit gebraucht wird als für eine Add/Sub. Die Anzahl der wesentlichen Operationen nennt man auch *Ostrowski-Count*. In neuerer Zeit geht man allerdings dazu über, die Mult/Div und Add/Sub zusammenzuzählen. Das Zählergebnis wird in aller Regel *flops* ([engl.] *floating point operations*) genannt.

Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß ein weiterer Aspekt immer wichtiger werden wird. Nämlich die Frage, ob ein Algorithmus parallelisiert werden kann. Dazu muß man wissen, daß neuere Computer in der Lage sind (oder sein werden), einige oder sogar sehr viele Operationen gleichzeitig auszuführen. Parallelisierung bedeutet, daß ein Algorithmus so formuliert wird, daß er von diesen Möglichkeiten Gebrauch machen kann. Hinweise dazu sind vorhanden in SCHABACK & WERNER [1992].

Um die angesprochene Übertragung eines Algorithmus auf einen Computer möglich zu machen, bedarf es einer Programmiersprache. Für Unterrichtszwecke hat sich das von dem Schweizer WIRTH [1971] veröffentlichte *Pascal* als sehr zweckmäßig herausgestellt. Diese Sprache erlaubt insbesondere strukturiertes Programmieren (d. h. Aufteilen in kleine, überschaubare, für sich verständliche Teile). Die Literatur über Pascal ist sehr reichhaltig. Es werde hingewiesen auf Bücher von BERNHUBER ET ALII [1988], HERSCHEL [1986] und nicht im Buchhandel erhältliche Handbücher von HEIMSOETH & BORLAND über Turbo-Pascal.

Nach längerer Erfahrung mit Pascal wird man feststellen, daß gewisse Routine-Operationen (z. B. das Aufsummieren von Zahlen, oder das Zeichnen eines Funktionsgraphen) sehr mühsam sind. Hier ist eine neuere von dem Amerikaner MOLER angegebene Sprache MATLAB sehr nützlich, die auch hier, insbesondere bei der Herstellung der meisten Zeichnungen Verwendung gefunden hat (MOLER, ULLMAN, LITTLE & BANGERT [1987]). Es ist allerdings zu bemerken, daß die Strukturierungsmöglichkeiten in MATLAB eingeschränkt sind.

Den Lesern dieses Textes wird empfohlen, den gleichen Stoff parallel in der (normalerweise nicht für Anfänger konzipierten) Literatur zu studieren, z. B. in den Büchern von MAESS [1985, 1988], PRESS ET ALII [1986], SCHMEISSER & SCHIRMEIER [1976], SCHWARZ [1997], STOER [1999]. Weitere Hinweise auf die Literatur sind im Text eingestreut.

Ein erstes Manuskript nach dem angegebenen Konzept wurde von C. Maas geschrieben. Das ist an verschiedenen Stellen im vorliegenden Text noch zu erkennen. Viele nützliche Anregungen und Hilfestellungen von B. Fischer, C. Geiger, U. Grothkopf, W. Hofmann, J. Modersitzki, Gu. Opfer, P. Stork, H. Voß, P. Weidner, B. Werner und Q. Zheng sind verwendet worden. Das vorliegende Manuskript wurde in seiner ersten Fassung von U. Gehrke in LaTeX geschrieben. S. Loges hat bei der Bewältigung TeXnischer Schwierigkeiten des umfangreichen Manuskripts wertvolle Hilfe geleistet.

Hamburg, im September 1992 G. O.

Vorwort zur dritten Auflage

Gegenüber der zweiten Auflage sind nicht nur bekannt gewordene Fehler korrigiert, sondern an einigen Stellen auch Ergänzungen vorgenommen worden. In Kapitel 3 über Interpolation gibt es jetzt einen neuen Abschnitt über *radiale Funktionen*. Das sind Funktionen, die sich besonders gut zur Interpolation von unregelmäßig verteilten Daten in mehreren Dimensionen eignen, wie sie z. B. bei der Herstellung von topographischen Karten vorkommen. Im selben Kapitel ist der

Abschnitt über Splines herausgelöst, um einen solchen zum Thema B-Splines erweitert und zu einem neuen Kapitel 4 über Splines zusammengefaßt worden. Bei der Behandlung der B-Splines bin ich von der traditionellen Definition über die dividierten Differenzen der abgeschnittenen Potenzen abgewichen und habe als Definition die bekannte Rekursionsformel benutzt. Das hat große Vorteile: Man kann die B-Splines sofort zu beliebigen Knotenfolgen mit einem effektiven Algorithmus berechnen und entsprechend visualisieren. Der Nachweis der entsprechenden Glattheit an den Knoten erfolgt dann über eine Identität von MARSDEN [1970]. Dabei ist eine Idee von DE BOOR & HÖLLIG [1987] verfolgt worden, die in einem Artikel von DE BOOR [1996] noch einmal sehr liebevoll aufgearbeitet wurde. Im letzten Kapitel über nichtlineare Gleichungen sind die eindimensionalen Probleme etwas besser strukturiert worden. Das Farbbild zum Newton-Verfahren mußte aus Kostengründen einem Schwarzweiß-Bild weichen.

Es haben mich wieder Kollegen und auch Studierende auf mögliche Verbesserungsvorschläge hingewiesen, für die ich an dieser Stelle herzlich danke. Erwähnen möchte ich besonders den am 14. Mai 2000 verstorbenen Jochen W. Schmidt aus Dresden, der mir besonders im Spline-Bereich viele Hinweise gegeben hat. Dann sind zu nennen die Hamburger Kollegen Carl Geiger und Bodo Werner, die mir ihre umfangreichen Erfahrungen anläßlich der Benutzung des Buches in verschiedenen Kursen über Numerische Mathematik mitgeteilt haben. Auch möchte ich den Studenten Dieter Baldenius erwähnen, der viele kleine „Fehlerchen“ entdeckt hat.

Ich habe auch wieder, wenn auch nicht systematisch bibliographische Hinweise auf die im Text erwähnten Mathematikerinnen und Mathematiker eingefügt. Es ist dabei aber nicht möglich, mit den heute vorhandenen Informationsdiensten, z. B. mit

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/`

zu konkurrieren. Diese Internetseiten enthalten ausführliche Biographien vieler Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler. Trotzdem wird man selbst dort besonders im Bereich der angewandten Mathematik viele Lücken entdecken.

Die Abbildungen und die Rechnungen sind zum größten Teil mit MATLAB, Version 5.3 hergestellt und der Text vom Autor in der ihm gewohnten Rechtschreibung mit einer neueren LaTeX-Variante geschrieben worden.

Hamburg, im März 2001 G. O.

Inhaltsverzeichnis

Hinweis: Die Beispiele, Tabellen,..., Sätze, Definitionen etc. sind in jedem Kapitel einheitlich durchlaufend numeriert, mit vorangestellter Kapitelnummer. Dasselbe gilt für die Formelnummern, für die nach gleichem Muster eine separate Durchnumerierung existiert. Die (Unter-) Abschnittsnummern werden also nicht in das Numerierungssystem übernommen.

Liste der Beispiele

Liste der Tabellen

Liste der Figuren

Liste der Programme