Christian Blatter

Wavelets – Eine Einführung

Advanced Lectures in Mathematics

Christian Blatter
Wavelets – Eine Einführung

Thomas Friedrich
Dirac-Operatoren in der Riemannschen Geometrie

Martin Fuchs
Topics in the Calculus of Variations

Wolfgang Ebeling
Lattices and Codes

Jesús M. Ruiz
The Basic Theory of Power Series

Christian Blatter

Wavelets – Eine Einführung

vieweg

Prof. Dr. Christian Blatter
Departement Mathematik
ETH Zentrum
CH-8092 Zürich

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Blatter, Christian:
Wavelets – Eine Einführung / Christian Blatter. –
Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1998
(Advanced Lectures in Mathematics)
ISBN 978-3-528-06947-6 ISBN 978-3-322-96887-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-96887-6

Mathematics Subject Classification:
41-01, 44-01

Vieweg is a subsidiary company of Bertelsmann Professional Information.

http://www.vieweg.de

Cover design: Klaus Birk, Wiesbaden

Printed on acid-free paper

ISSN 0932-7134
ISBN 978-3-528-06947-6

Vorwort

Dieses Buch ist weder die „große Retrospektive“ eines Protagonisten noch eine enzyklopädische Forschungsmonographie, sondern die Annäherung eines mathematischen Normalverbrauchers an ein Thema, das wie kein anderes seit der Erfindung der Schnellen Fourier-Transformation die Approximationstheorie stimuliert und die Anwender beflügelt hat. Ich hatte eigentlich nur im Sinn, für Studenten der ETH Zürich eine einsemestrige Vorlesung zusammenzustellen, die sie *ab ovo* in die Welt der Wavelets einführen sollte (einen derartigen Kurs hatte es hier noch nicht gegeben). Dank der Zusprache von Kollegen ist nun aus dieser Vorlesung das vorliegende Buch geworden.

Mein Zielpublikum hatte ich mir so vorgestellt: MathematikstudentInnen mit der üblichen Grundausbildung, mit einem Rucksack voller Konvergenzsätze, aber ohne praktische Erfahrung, sagen wir, mit Fourier-Analysis. Im stillen hatte ich mir auch Zuhörer aus der Ingenieurswelt gewünscht; erst im Nachhinein habe ich erfahren, daß gerade letztere aus dem Kurs den größten Gewinn gezogen hatten.

Inhaltlich habe ich mir folgendes vorgenommen: Im ersten Kapitel gibt es einen Tour d'horizon über verschiedene Weisen der Signaldarstellung, und schon hier tritt zum ersten Mal das Haar-Wavelet auf den Plan. Das zweite Kapitel bringt ein Repetitorium der Fourier-Analysis (ohne Beweise), ergänzt durch zwei Theoreme, die „letztgültige“ Grenzen der Signaltheorie abstecken: die Heisenbergsche Unschärferelation und das Abtast-Theorem von Shannon. In Kapitel 3 beginnt es dann richtig mit der kontinuierlichen Wavelet-Transformation, und Kapitel 4: „Frames“ beschreibt einen allgemeinen Rahmen (was sonst ...), in dem sowohl die kontinuierliche wie die diskrete Wavelet-Transformation begriffen werden können. Damit kommen wir endlich zur Hauptsache: der Multiskalen-Analyse mit ihren schnellen Algorithmen in Kapitel 5, und zur Konstruktion von orthonormierten Wavelets mit kompaktem Träger in Kapitel 6. Auch Spline-Wavelets werden kurz noch behandelt.

Was bei dem gegebenen Umfang fehlt, sind Biorthogonalsysteme, mehrdimensionale Wavelets und eine ins Einzelne gehende Behandlung von Anwendungen. Ferner sollte es ohne Einsatz von Distributionen abgehen. Es gibt also keine Sobolev-Räume und damit auch keine Diskussion der punktweisen Konvergenz usw. von Wavelet-Approximationen, und das Paley-Wiener-Theorem steht ebenfalls nicht zur Verfügung. Glücklicherweise läßt sich auch mit Hilfe eines elementaren Arguments beweisen, daß die Daubechies-Wavelets kompakten Träger besitzen.

Beim Aufarbeiten des Stoffes habe ich mich großzügig bei anderen Autoren bedient, in erster Linie natürlich bei den unvergleichlichen „Ten lectures on wavelets" von Ingrid Daubechies [D], in geringerem Maß bei [L], dem einzigen anderen mir bekannten Wavelet-Buch in deutscher Sprache, und im „Friendly guide to wavelets" von Kaiser [K]. Für weitere Quellen der Inspiration verweise ich auf das Literaturverzeichnis. Ich habe dieses Verzeichnis bewußt sehr knapp gehalten und darauf verzichtet, die sehr umfangreichen, aber nicht bis 1997 nachgeführten Literaturangaben in [D] oder [L] einfach nachzudrucken.

Noch ein Wort zu den Figuren: Die meisten Graphen von mathematisch definierten Funktionen wurden zunächst mit Hilfe von Mathematica® berechnet, als `Plot` ausgegeben und hierauf in der Graphik-Umgebung „Canvas" weiterbearbeitet. Einige der Figuren, zum Beispiel die Bilder 3.7 und 6.1, wurden mit „Think Pascal" als Bitmap erzeugt, im A4-Format ausgedruckt und anschließend photographisch verkleinert.

Ich danke allen, die mich zu diesem Unternehmen ermutigt und mir dabei geholfen haben, in erster Linie den Herausgebern der Reihe „Advanced Lectures in Mathematics" und dem Vieweg-Verlag für die Aufnahme dieser „Einführung" in ihr Programm.

Zürich, Ende November 1997

Christian Blatter

Inhaltsverzeichnis

Hinweise und besondere Bezeichnungen IX

1 Problemstellung 1

1.1 Ein zentrales Thema der Analysis 1
1.2 Fourier-Reihen 4
1.3 Fourier-Transformation 8
1.4 Gefensterte Fourier-Transformation 10
1.5 Wavelet-Transformation 13
1.6 Das Haar-Wavelet 18

2 Fourier-Analysis 26

2.1 Fourier-Reihen 26
2.2 Fourier-Transformation auf $\mathbb{R}$ 31
2.3 Die Heisenbergsche Unschärferelation 43
2.4 Das Abtast-Theorem von Shannon 47

3 Die kontinuierliche Wavelet-Transformation 54

3.1 Definitionen und Beispiele 54
3.2 Eine Plancherel-Formel 61
3.3 Umkehrformeln 65
3.4 Die Kernfunktion 69
3.5 Abklingverhalten 73

4 Frames 79

4.1 Geometrische Betrachtungen 79
4.2 Der allgemeine Frame-Begriff 87
4.3 Diskrete Wavelet-Transformation 91
4.4 Beweis des Satzes **(4.10)** 100

5 Multiskalen-Analyse 105

5.1 Axiomatische Beschreibung 106
5.2 Die Skalierungsfunktion 110
5.3 Konstruktionen im Fourier-Bereich 117
5.4 Algorithmen 130

6 Orthonormierte Wavelets mit kompaktem Träger 137
6.1 Lösungsansatz 137
6.2 Algebraische Konstruktionen 146
6.3 Binäre Interpolation 154
6.4 Spline-Wavelets 164

Literaturverzeichnis 175

Sachverzeichnis 177

Hinweise und besondere Bezeichnungen

Dieses Buch ist eingeteilt in sechs Kapitel, und jedes Kapitel ist weiter unterteilt in Abschnitte. Formeln, die später nocheinmal benötigt werden, sind abschnittweise mit mageren Ziffern numeriert. Innerhalb eines Abschnitts wird ohne Angabe der Abschnittnummer auf Formel (1) zurückverwiesen; 3.4.(2) hingegen bezeichnet die Formel (2) des Abschnitts 3.4.

Neu eingeführte Begriffe sind am Ort ihrer Definition *schräg* gesetzt; eine weitergehende Warnung („Achtung, jetzt kommt eine Definition“) erfolgt nicht. Definitionen lassen sich vom Sachverzeichnis her jederzeit wieder auffinden.

Sätze (Theoreme) sind kapitelweise numeriert; die halbfette Signatur **(4.3)** bezeichnet den dritten Satz in Kapitel 4. Sätze werden im allgemeinen angesagt; jedenfalls sind sie erkenntlich an der vorangestellten Signatur und am *durchlaufenden Schrägdruck* des Textes. Die beiden Winkel $\ulcorner$ und $\lrcorner$ bezeichnen den Beginn und das Ende eines Beweises.

Eingekreiste Ziffern numerieren abschnittweise die erläuternden Beispiele; der leere Kreis $\bigcirc$ markiert das Ende eines Beispiels.

Eine Familie von Objekten c_α über der Indexmenge I (ein „Datensatz“) wird bezeichnet mit

$$\left(c_\alpha \mid \alpha \in I\right) =: c_\bullet \ .$$

1_A bezeichnet die charakteristische Funktion der Menge A und $\mathbf{1}_X$ die identische Abbildung des Vektorraums X.

Sind e bzw. $a_1, \ldots, a_r$ gegebene Vektoren eines Vektorraums X, so bezeichnen $<e>$ bzw. $\mathrm{span}(a_1, \ldots, a_r)$ den von e bzw. von den a_k aufgespannten Unterraum.

$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die multiplikative Gruppe der reellen Zahlen.

$\mathbb{R}^2_- := \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ ist die „zersägte (a,b)-Ebene“, wobei in Figuren die a-Achse vertikal, die b-Achse horizontal angelegt ist.

Das Zeichen $\int$ ohne Angabe von Integrationsgrenzen bezeichnet immer das über die ganze reelle Achse erstreckte Integral bezüglich des Lebesgue-Maßes:

$$\int f(t)\,dt := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \ .$$

Analog: Summen $\sum_k$ ohne Angaben von Summationsgrenzen erstrecken sich über ganz $\mathbb{Z}$:

$$\sum_k a_k := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \ .$$

Fourier-Transformation:

$$\widehat{f}(\xi) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t)\, e^{-i\xi t}\, dt\ .$$

Umkehrformel, gelegentlich als Fourier$^\vee$-Transformation bezeichnet:

$$f(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi\ .$$

Mit $j_a^N f$ bezeichnen wir den N-Jet (das Taylor-Polynom der Ordnung N) von f an der Stelle $a \in \mathbb{R}$, in Formeln:

$$j_a^N f(t) \;:=\; \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(t-a)^k\ .$$

Das Symbol $\mathbf{e}_\alpha$ bezeichnet die Funktion

$$\mathbf{e}_\alpha\colon\quad \mathbb{R} \to \mathbb{C}\,, \qquad t \mapsto e^{i\alpha t}\ .$$

Für Funktionen $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{X} = \mathbb{Z}$, bezeichnen $a(f)$ und $b(f)$ das linke und das rechte Ende des Trägers von f:

$$a(f) \;:=\; \inf\bigl\{x \in \mathbb{X} \bigm| f(x) \neq 0\bigr\}\,, \qquad b(f) \;:=\; \sup\bigl\{x \in \mathbb{X} \bigm| f(x) \neq 0\bigr\}\ .$$

Ein *Zeitsignal* ist ganz einfach eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.