

**Wolfgang Schäfer, Kurt Georgi, Gisela Trippler**

# **Mathematik-Vorkurs**

**Wolfgang Schäfer, Kurt Georgi, Gisela Trippler**

# **Mathematik-Vorkurs**

**Übungs- und Arbeitsbuch für Studienanfänger**

5., überarbeitete Auflage

unter Mitarbeit von Christa Otto



**Teubner**

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme  
Ein Titeldatensatz für diese Publikation ist bei  
der Deutschen Bibliothek erhältlich.

1. Auflage 1993  
4. Auflage 1999  
5., überarbeitete Auflage September 2002

Alle Rechte vorbehalten  
© B. G. Teubner GmbH, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2002

Der Verlag Teubner ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer.  
[www.teubner.de](http://www.teubner.de)



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Waren- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, [www.CorporateDesignGroup.de](http://www.CorporateDesignGroup.de)

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

ISBN 978-3-519-10249-6      ISBN 978-3-322-96750-3 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-322-96750-3

# Vorwort

Das vorliegende Übungs- und Arbeitsbuch dient der Vorbereitung auf die Mathematik-Grundausbildung an Hochschulen im weitesten Sinne. Dabei stehen natur-, ingenieur- und wirtschaftswissenschaftliche Studiengänge im Mittelpunkt.

Es wendet sich sowohl an jene Leser, die sich frühzeitig entschlossen haben, ein mathematikintensives Studium zu beginnen, als auch an alle, die schon studieren und nun merken, was ihnen an Mathematikkenntnissen fehlt, und die das Fehlende möglichst schnell nachholen wollen.

Das Buch beinhaltet alle wesentlichen Stoffgebiete, die auch in den Mathematikprüfungen zum Abitur und zu anderen Formen der Hochschulreife von Bedeutung sind.

Da es in Deutschland kein "Einheitsabitur" gibt, sind die Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten im Fach Mathematik - sogar bei Studienanfängern formal gleicher Bildungswege - extrem unterschiedlich und nicht selten zu gering. Die Mathematikausbildung an Hochschulen orientiert sich dann meist an einem "mittleren" Studenten. Die Folge sind außerordentliche Schwierigkeiten bei einem beträchtlichen Teil der Studienanfänger, und das nicht nur im Fach Mathematik, sondern auch in anderen Grundlagenfächern.

Oft ist das Scheitern eines Hochschulstudiums auf diese Anfangsschwierigkeiten zurückzuführen, während gute Mathematik-Vorkenntnisse für den Erfolg des Studiums und sogar für den beruflichen Erfolg entscheidend sein können.

Die Autoren kennen diese Probleme von beiden Seiten: aus der Sicht der Mathematik-Grundausbildung an Hochschulen und aus der Sicht der Vorbereitung auf das Hochschulstudium. Dabei haben sie auch jahrelang mit verschiedenen von ihnen entwickelten Lehrmaterialien Erfahrungen sammeln können.

Trotz großer Bemühungen war es aus Papiermangel früher leider nicht möglich, diese erprobten und erfolgreichen Lehrmaterialien zu einem Buch zu verdichten. Das geschieht nun im vereinigten Teubner-Verlag Stuttgart-Leipzig.

Den ersten Abschnitten sind nur kurze theoretische Einführungen vorangestellt, den späteren längere. Letzteres gilt vor allem für die Abschnitte 15-21, die dann schon Lehrbuchcharakter tragen. Jeder Abschnitt enthält eine Reihe instruktiver Lehrbeispiele (gelöste Musteraufgaben) und vor allem viele Aufgaben nebst Lösungen zum eigenständigen Üben. Somit kann der Leser überprüfen, ob er die einzelnen Teilgebiete wirklich schon in genügendem Maße beherrscht.

Die Frage, welche Abschnitte besonders wichtig sind, vor allem wenn man aus Zeitgründen eine Auswahl treffen muß, ist natürlich schwer zu beantworten. Aber die folgende Regel dürfte der Wahrheit nahekommen:

Die Abschnitte 1-4, 6 und 16 sind von fundamentaler Bedeutung, denn oft versteht

man die "höhere" Mathematik recht gut, kann aber die gestellten Aufgaben nicht lösen, weil man die elementarsten Umformungen nicht beherrscht.

An den Hochschulen werden aber auch Kenntnisse vorausgesetzt, die über die Elementarmathematik hinausgehen. Dringend zu empfehlen sind daher für die lineare Algebra und die analytische Geometrie die Abschnitte 11 und 17 und für die Analysis die Abschnitte 20 und 21, wobei man teilweise auf die Abschnitte 15, 18 und 19 zurückgreifen muß.

Die Autoren möchten sich bei der B. G. Teubner Verlagsgesellschaft sehr herzlich dafür bedanken, daß dieses schon lange geplante Buch nun erscheinen kann. Ihr besonderer Dank gilt den Herren Dr. P. Spuhler und J. Weiß für ihr persönliches Engagement, ohne das die Herausgabe so schnell nicht möglich gewesen wäre. Herrn H. Rößler danken wir für die Mitarbeit bei der Herstellung der reproduktionsfähigen Druckvorlage.

Leipzig, Dezember 1992

Wolfgang Schäfer  
Kurt Georgi

## **Vorwort zur 5. Auflage**

Zur Vorbereitung auf die vorliegende fünfte, überarbeitete Auflage wurde das Buch wieder einer kritischen Analyse unterzogen. Es enthält abermals erhebliche Verbesserungen, vor allem der Kapitel 1 bis 13.

Wir bedanken uns beim Teubner-Verlag und bei Herrn Jürgen Weiß in Leipzig. Unser besonderer Dank gilt auch diesmal Herrn Oberstudienrat Rolf Trippler für die sehr zuverlässige Mitarbeit bei der Herstellung der reproduktionsfähigen Druckvorlage.

Leipzig, April 2002

Wolfgang Schäfer  
Kurt Georgi  
Gisela Trippler

# Inhalt

1	Elementare Rechenoperationen mit reellen Zahlen	11
1.1	Aufbau des Zahlensystems	11
1.2	Abgeleitete Rechenregeln	16
1.3	Übungsaufgaben	24
2	Potenzen und Wurzeln	33
2.1	Potenzen mit ganzzahligen Exponenten	33
2.2	Wurzeln und Potenzen mit rationalen Exponenten	35
2.3	Potenzen mit reellen Exponenten	38
2.4	Zusammenfassung	39
2.5	Übungsaufgaben	39
3	Logarithmen	43
3.1	Begriff des Logarithmus	43
3.2	Logarithmengesetze	44
3.3	Zusammenfassung	46
3.4	Übungsaufgaben	46
4	Goniometrie	49
4.1	Elementargeometrie	49
4.2	Die Seitenverhältnisse am rechtwinkligen Dreieck	57
4.3	Die Winkelfunktionen am Einheitskreis	58
4.4	Sinus- und Kosinussatz	63
4.5	Trigonometrische Formeln	65
4.6	Übungsaufgaben	66
5	Komplexe Zahlen	71
5.1	Summe und Differenz	73
5.2	Produkt	74
5.3	Quotient	75
5.4	Übungsaufgaben	75
6	Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten	78
6.1	Übungsaufgaben	84
7	Einige Grundbegriffe der mathematischen Logik	91
7.1	Aussage, Wahrheitswert, Aussageform	91
7.2	Verknüpfung von Aussagen (Aussagenfunktionen)	92
7.3	Beziehungen zwischen den Aussagenfunktionen	96
7.4	Existenz- und Universalaussagen	97
7.5	Notwendige und hinreichende Bedingung	98
7.6	Übungsaufgaben	99

8	Beweismethoden	100
8.1	Der direkte Beweis	100
8.2	Der indirekte Beweis	101
8.3	Beweis durch vollständige Induktion	102
8.4	Übungsaufgaben	103
9	Grundbegriffe der Mengenlehre	104
9.1	Der Begriff der Menge	104
9.2	Relationen zwischen Mengen	105
9.3	Operationen mit Mengen	106
9.4	Abbildungen	110
9.5	Übungsaufgaben	114
10	Kombinatorik - Binomischer Satz	116
10.1	Die Fakultät	116
10.2	Binomialkoeffizienten	116
10.3	Der binomische Satz	118
10.4	Kombinatorik	121
10.5	Übungsaufgaben	130
11	Lineare Algebra	133
11.1	Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten	133
11.2	Lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten	149
11.3	Beliebig viele Gleichungen mit beliebig vielen Unbekannten	156
11.4	Homogene Gleichungssysteme	161
11.5	Übungsaufgaben	163
12	Algebraische Gleichungen	169
12.1	Nichtlineare Gleichungen	169
12.2	Quadratische Gleichungen	171
12.3	Gleichungen dritten Grades	182
12.4	Wurzelgleichungen	186
12.5	Übungsaufgaben	188
13	Transzendente Gleichungen	196
13.1	Logarithmische Gleichungen	196
13.2	Exponentialgleichungen	199
13.3	Goniometrische Gleichungen	202
13.4	Übungsaufgaben	207
14	Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen	212
14.1	Ungleichungen	212
14.2	Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen	221
14.3	Übungsaufgaben	230

15	Funktionen	234
15.1	Funktionsbegriff und Darstellung von Funktionen	234
15.2	Eigenschaften von Funktionen	235
15.3	Elementare Funktionen	238
15.4	Mittelbare Funktionen	255
15.5	Übungsaufgaben	256
16	Analytische Geometrie der Ebene	260
16.1	Die Gerade	260
16.2	Der Kreis	266
16.3	Die Ellipse	270
16.4	Die Hyperbel	273
16.5	Die Parabel	277
16.6	Zusammenfassung	279
16.7	Übungsaufgaben	280
17	Vektorrechnung und ihre Anwendung in der Geometrie	284
17.1	Definition des Vektors	
	Darstellung im kartesischen Koordinatensystem	284
17.2	Das skalare Produkt zweier Vektoren	288
17.3	Das vektorielle Produkt zweier Vektoren	290
17.4	Das Spatprodukt	293
17.5	Anwendung von Vektoren in der analytischen Geometrie	295
17.6	Übungsaufgaben	301
18	Zahlenfolgen	304
18.1	Einführung	304
18.2	Begriff der Zahlenfolge	304
18.3	Grenzwerte von Zahlenfolgen	305
18.4	Berechnung von Grenzwerten	308
18.5	Übungsaufgaben	315
19	Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen	317
19.1	Grundlegende Begriffe	317
19.2	Sätze über Grenzwerte und Stetigkeit	322
19.3	Eigenschaften stetiger Funktionen	323
19.4	Die Stetigkeit der elementaren Funktionen	324
19.5	Übungsaufgaben	325



10      **Inhalt**

20	Differentialrechnung	327
20.1	Differentialquotient und Ableitung	327
20.2	Differentiationsregeln	336
20.3	Die Ableitung der elementaren Funktionen	341
20.4	Extremwerte und Wendepunkte	346
20.5	Optimierungsprobleme	357
20.6	Übungsaufgaben	360
21	Integralrechnung	369
21.1	Bestimmtes und unbestimmtes Integral	369
21.2	Grundintegrale	373
21.3	Integrationsregeln	374
21.4	Anwendungen der Integralrechnung	381
21.5	Übungsaufgaben	385
	Lösungen ausgewählter Übungsaufgaben	390
	Sachverzeichnis	440