

Hubert Weber

Laplace-Transformation

für Ingenieure der Elektrotechnik

Hubert Weber

Laplace-Transformation

für Ingenieure der Elektrotechnik

7., überarbeitete und ergänzte Auflage

Mit 111 Abbildungen und 125 Beispielaufgaben



B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

Prof. Hubert Weber, Fachhochschule Regensburg

1. Aufl. 1976
2. Aufl. 1978
3. Aufl. 1981
4. Aufl. 1984
5. Aufl. 1987
6. Aufl. 1990
7. überarbeitete und ergänzte Auflage März 2003

Alle Rechte vorbehalten

© B. G. Teubner Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2003

Der Teubner Verlag ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer.
www.teubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Waren- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

ISBN 978-3-519-10141-3 ISBN 978-3-322-96747-3 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-96747-3

Vorwort

Die Laplace-Transformation ist eine Funktionaltransformation, das heißt einer Funktion $f(t)$ des reellen Zeitbereiches wird eine Bildfunktion $F(s)$ einer komplexen Variablen s zugeordnet. Laplace-Transformation und inverse Laplace-Transformation sind durch Integrale definiert.

Die Beschäftigung mit dieser Transformation ist auch für mehr an der Anwendung der Mathematik interessierten Ingenieure sinnvoll, da viele Problemlösungen im Bildbereich der Laplace-Transformation wesentlich einfacher verlaufen. Dies ist deshalb der Fall, da den schwierigeren Differentiationen und Integrationen des Zeitbereiches einfache algebraische Operationen im Bildbereich entsprechen.

So werden zum Beispiel lineare Differentialgleichungen des Zeitbereiches zu linearen Gleichungen des Bildbereiches. Für Anwendungen in der Elektrotechnik kann durch Einführen von Bildspannungen, Bildströmen und Bildwiderständen auf das Aufstellen der Differentialgleichungen des Zeitbereiches ganz verzichtet werden, wodurch die Problemlösung nochmals vereinfacht wird.

Es soll versucht werden, eine Einführung in die Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation zu geben, die einerseits ausreicht, viele in der Praxis auftretenden Probleme zu lösen, die andererseits aber auch eine Grundlage für weitergehende Studien darstellt. Um dieses Ziel ohne allzu großem Aufwand erreichen zu können, wurde vielfach auf eine volle mathematische Strenge verzichtet.

Die Verwendung von Methoden der Funktionentheorie zur inversen Laplace-Transformation wird gezeigt, aber nicht zum Prinzip der inversen Laplace-Transformation gemacht. Die Auswertung der „komplexen Umkehrformel“ setzt Kenntnisse der Analysis komplexwertiger Funktionen voraus. Die dazu notwendigen Sätze werden aufgeführt.

Die Verwendung von Korrespondenzen und Transformationsregeln ist einfacher. Der Weg, die Bildfunktion in Terme zu zerlegen und gliedweise zu transformieren ist praxisgerechter und zeigt die Bedeutung der Lage der Pole einer Bildfunktion für die zugehörige Zeitfunktion.

Für eine gekürzte Behandlung der Laplace-Transformation hat es sich bewährt, nach der Definition der Laplace-Transformation im Abschnitt 4.1 gleich zu den Transformationsregeln überzugehen, wobei die Abschnitte 4.3.9, 4.3.14 und 4.3.15 zunächst ausgelassen werden können, um schneller zu den Anwendungen zu gelangen.

Ich möchte mich beim B. G. Teubner Verlag und insbesondere bei Herrn Dr. Feuchte vom Lektorat Maschinenbau/Elektrotechnik bedanken, dass dieses aus Vorlesungen an der Fachhochschule Regensburg entstandene Buch in einer neuen Auflage erscheinen kann.

Regensburg, im Januar 2003

Hubert Weber

INHALT

1 FOURIERREIHEN

1.1	EINFÜHRUNG.....	1
1.2	REELLE FOURIERREIHE.....	2
1.2.1	Grundbegriffe.....	2
1.2.2	Berechnung der Fourierkoeffizienten.....	3
1.2.3	Amplitudenspektrum	8
1.3	KOMPLEXE FOURIERREIHE	12
1.3.1	Grundlagen	12
1.3.2	Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten	13

2 FOURIERINTEGRAL

2.1	ÜBERGANG VON DER FOURIERREIHE ZUM FOURIERINTEGRAL.....	17
2.2	EIGENSCHAFTEN DES FOURIERINTEGRALS.....	20

3 FOURIERTRANSFORMATION

3.1	DEFINITION DER FOURIERTRANSFORMATION.....	27
3.2	DISKRETE FOURIERTRANSFORMATION (DFT) UND SCHNELLE FOURIERTRANSFORMATION (FFT).....	30

4 LAPLACE-TRANSFORMATION

4.1	DEFINITION DER LAPLACE-TRANSFORMATION.....	31
4.2	INVERSE LAPLACE-TRANSFORMATION	35
4.3	TRANSFORMATIONSREGELN	48
4.3.1	Laplace-Transformierte elementarer Zeitfunktionen	49
4.3.2	Additionssatz.....	54
4.3.3	Verschiebungssatz	57
4.3.4	Dirac'sche Deltafunktion	65
4.3.5	Dämpfungssatz.....	70
4.3.6	Partialbruchzerlegungen	73
4.3.7	Pol-Nullstellenplan einer echt gebrochen rationalen Bildfunktion	85
4.3.8	Faltungssatz	89
4.3.9	Inverse Laplace-Transformation durch Reihenentwicklung der Bildfunktion	92
4.3.10	Integrationsatz für die Originalfunktion	97

4.3.11	Differentiationssatz für die Originalfunktion	102
4.3.12	Differentiationssatz für die verallgemeinerte Ableitung einer Zeitfunktion	105
4.3.13	Grenzwertsätze.....	109
4.3.14	Differentiationssatz für die Bildfunktion	112
4.3.15	Integrationssatz für die Bildfunktion.....	115
4.4	ANWENDUNGEN DER LAPLACE-TRANSFORMATION	119
4.4.1	Lösen von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.....	119
4.4.2	Lösen von Systemen gewöhnlicher linearen Differential- gleichungen mit konstanten Koeffizienten	125
4.4.3	RCL-Netzwerke.....	134
4.5	ÜBERTRAGUNGSVERHALTEN VON NETZWERKEN	152
4.5.1	Grundbegriffe.....	152
4.5.2	Impulsantwort und Sprungantwort.....	153
4.5.3	Übertragungsfunktion	154
4.5.4	Pol-Nullstellenplan einer Übertragungsfunktion	166
4.5.5	Übertragungsfunktion und Frequenzgang	168
5	ANHANG	
5.1	LÖSUNGEN ZU DEN ÜBUNGSAUFGABEN	177
5.2	SÄTZE DER LAPLACE-TRANSFORMATION.....	190
5.3	KORRESPONDENZEN DER LAPLACE-TRANSFORMATION	191
5.4	LITERATUR.....	199
5.5	LISTE DER VERWENDETEN FORMELZEICHEN	200
5.6	SACHWORTVERZEICHNIS	201