# Teubner Studienbücher

## Mathematik

Ahlswede/Wegener: **Suchprobleme**
328 Seiten. DM 29,80

Ansorge: **Differenzenapproximationen partieller Anfangswertaufgaben**
298 Seiten. DM 29,80 (LAMM)

Bohl: **Finite Modelle gewöhnlicher Randwertaufgaben**
318 Seiten. DM 29,80 (LAMM)

Böhmer: **Spline-Funktionen**
Theorie und Anwendungen. 340 Seiten. DM 30,80

Bröcker: **Analysis in mehreren Variablen**
einschließlich gewöhnlicher Differentialgleichungen und des Satzes von Stokes
VI, 361 Seiten. DM 29,80

Clegg: **Variationsrechnung**
138 Seiten. DM 18,80

Collatz: **Differentialgleichungen**
Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen
6. Aufl. 287 Seiten. DM 29,80 (LAMM)

Collatz/Krabs: **Approximationstheorie**
Tschebyscheffsche Approximation mit Anwendungen. 208 Seiten. DM 28,–

Constantinescu: **Distributionen und ihre Anwendung in der Physik**
144 Seiten. DM 19,80

Dinges/Rost: **Prinzipien der Stochastik**
294 Seiten. DM 34,–

Fischer/Sacher: **Einführung in die Algebra**
2. Aufl. 240 Seiten. DM 19,80

Floret: **Maß- und Integrationstheorie**
Eine Einführung. 360 Seiten. DM 29,80

Grigorieff: **Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen**
Band 1: Einschrittverfahren. 202 Seiten. DM 18,80
Band 2: Mehrschrittverfahren. 411 Seiten. DM 29,80

Hainzl: **Mathematik für Naturwissenschaftler**
3. Aufl. 376 Seiten. DM 29,80 (LAMM)

Hässig: **Graphentheoretische Methoden des Operations Research**
160 Seiten. DM 26,80 (LAMM)

Hettich/Zencke: **Numerische Methoden der Approximation und semi-infinitiven Optimierung**
232 Seiten. DM 24,80

Hilbert: **Grundlagen der Geometrie**
12. Aufl. VII, 271 Seiten. DM 25,80

Jeggle: **Nichtlineare Funktionalanalysis**
Existenz von Lösungen nichtlinearer Gleichungen. 255 Seiten. DM 26,80

Kall: **Mathematische Methoden des Operations Research**
Eine Einführung. 176 Seiten. DM 24,80 (LAMM)

Fortsetzung auf der letzten Textseite

# Prinzipien der Stochastik

Von Dr. rer. nat. Hermann Dinges
Professor an der Universität Frankfurt/Main

und Dr. rer. nat. Hermann Rost
Professor an der Universität Heidelberg

Mit 34 Figuren, 98 Aufgaben und zahlreichen Beispielen

B. G. Teubner Stuttgart 1982

Prof. Dr. rer. nat. Hermann Dinges

Geboren 1936 in Ingolstadt. Von 1953 bis 1959 Studium der Mathematik und Physik in München, Innsbruck, Wien und Hamburg. 1958 Staatsexamen und 1959 Promotion in München. Assistent in Göttingen und Aarhus (Dänemark). 1963 Habilitation im Fach Mathematik. Seit 1966 Professor für Mathematik an der Universität Frankfurt. Längere Gastaufenthalte an der Cornell University in Ithaca, N. Y. (1963/64), der Catholic University in Washington (1968/69) und an der ETH Zürich (1971/72). Mitglied des ISI (International Statistical Institute)

Prof. Dr. rer. nat. Hermann Rost

Geboren 1940 in Augsburg. Von 1958 bis 1964 Studium der Mathematik und Physik in München. Von 1964 bis 1970 Assistent an den Universitäten München und Frankfurt. 1967 Promotion, 1970 Habilitation im Fach Mathematik. 1970/71 Assistant Professor in Columbus/Ohio. Seit 1973 o. Professor für Angewandte Mathematik in Heidelberg

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

**Dinges, Hermann:**
Prinzipien der Stochastik / von Hermann Dinges
u. Hermann Rost. – Stuttgart : Teubner, 1982.
(Teubner-Studienbücher : Mathematik)
ISBN 978-3-519-02062-2 ISBN 978-3-322-94889-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-94889-2
NE: Rost, Hermann:



Satz: Elsner & Behrens GmbH, Oftersheim

Umschlaggestaltung: W. Koch, Sindelfingen

## Vorwort

Das vorliegende Buch soll als Einführung in die Stochastik (d. h. Wahrscheinlichkeitstheorie unter Einschluß der mathematischen Statistik) verstanden werden. Es ist aus verschiedenen Vorlesungen hervorgegangen, welche die Verfasser an den Universitäten Frankfurt und Heidelberg gehalten haben. Der Adressatenkreis dieser Vorlesungen hat sich im Lauf der Zeit etwas verschoben: während wir uns früher hauptsächlich an Hörer wandten, die das Diplom in Mathematik mit dem Schwerpunkt Stochastik anstrebten, so war in späterer Zeit, nachdem Stochastik ein fester Bestandteil des Lehrstoffs in der gymnasialen Oberstufe in allen Bundesländern geworden war, zusehends den Bedürfnissen der Lehrerstudenten Rechnung zu tragen. Wir bemühten uns um eine hinreichend ausführlich angelegte Einführung in dieses Gebiet, das ja nicht zum traditionellen Kanon der Schulmathematik gehört. Mittlerweile sehen wir keinen einleuchtenden Grund mehr, warum eine Einführung für beide Personenkreise wesentlich verschieden sein sollte; in beiden Fällen kommt es darauf an, „stochastisches Denken“ zu lernen und Vorstellungen von der Reichweite stochastischer Argumentationen zu entwickeln. Es ist nach unserer Ansicht der falsche Weg, von Anfang an einen axiomatisch-deduktiven Aufbau vorzustellen, sowohl im Blick auf den künftigen Anwender in der Praxis als auch auf den Lehrer, schon wegen der Gefahr des Mißverständnisses beim letzteren, Wahrscheinlichkeitstheorie an der Schule erschöpfe sich in elementarisierter (trivialisierter) Maßtheorie in diskreten Räumen. Stattdessen glauben wir das stochastische Denken am besten zu entwickeln, indem wir einmal die begrifflichen Schwierigkeiten mit dem Zufall, die sich dem Lernenden erfahrungsgemäß stellen und die auch im Lauf der Geschichte dieser Wissenschaft an vielen Stellen die Diskussion beherrschten, ausführlich erörtern und zum anderen statistische Fragestellungen von Anfang an konsequent mit einbeziehen. (Daß auch elementare Statistik, nicht nur Wahrscheinlichkeitstheorie im engeren Sinn, schulrelevant ist, erscheint uns evident: wir denken an Beispiele vom Typ der Qualitätskontrolle oder der Meinungsumfrage.)

Umfang und Absicht des Buches lassen sich zunächst grob so charakterisieren: Einmal sollte es den künftigen (oder schon im Beruf stehenden) Lehrer in die Lage versetzen, den berühmten „höheren Standpunkt“ einzunehmen, von dem aus allein ein Unterricht sinnvoll erfolgen kann. Zum zweiten sollte es denjenigen Studenten, der sich weiter mit Stochastik beschäftigen will (dies kann auch ein Lehramtskandidat sein) in die Lage versetzen, anschließend an ein auf analytisch-maßtheoretischen Grundlagen aufbauendes Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitstheorie (etwa L. Breiman: Probability, Addison-Wesley 1968) mit einem tragfähigen Vorverständnis heranzugehen; es sollte ihm das benötigte Hintergrundwissen über die Zwecke, denen die dort auftretenden technischen Begriffe dienen, verschaffen. Schließlich sollte es denjenigen Studenten, die sich weiter mit praktischer Statistik befassen, eine Orientierung über die Reichweite mathematischer Argumentation in der Statistik bieten.

Das Organisationsprinzip des Buches ist bedingt durch ein Verständnis von Stochastik, vom stochastischen Denken und seiner Vermittlung, das in älteren Lehrbüchern so nicht zum Ausdruck kommt. Insbesondere sehen wir als angewandte Mathematiker eine Theorie wie die Stochastik nicht einfach als ein durchkonstruiertes Universum von Aussagen an. Wir betrachten vielmehr den Bezug auf einen bestimmten Bereich von Objekten als wesentlich. Eine entwickelte Vorstellung von den intendierten Anwendungen ergänzt die mathematischen (formalsyntaktischen) Aspekte. Um dieser Komplementarität in den Begriffen Rechnung zu tragen, stellen wir in unserem Buch immer wieder Verbindungen her zwischen einer allgemeinen Sicht der Probleme und den zu ihrer Lösung entwickelten technischen Mitteln. Ein Leser, der künftig als mathematischer Berater tätig sein wird, soll dahingehend beeinflußt werden, daß er weder die Konstruktion mathematischer Modelle noch die Interpretation möglicher Resultate allein dem Anwender (Ingenieur, Betriebswirt, Mediziner, etc.) überläßt, sondern den Brückenschlag zwischen Mathematik und Realität bis zuletzt verfolgt. Der Arbeitsbereich des Mathematikers kann u. E. nicht zwischen Axiome und Theoreme eingezwängt werden. Denn nur selten kann ein stochastisches Modell als „gültig" erwiesen werden und nur selten passen mathematische Resultate ohne weitere Interpretation auf eine Entscheidungssituation. Die Arbeit des Stochastikers soll dazu beitragen, Zusammenhänge zwischen Modellannahme und ihren Konsequenzen aufzuhellen; das Übersetzen eines Modells in die Umgangssprache, die auch der Anwender versteht, muß daher als wesentlicher Teil der stochastischen Ausbildung begriffen werden. Eine Einheitlichkeit der Methoden nach dem Vorbild der reinen Mathematik ist bei einer Einführung in die Stochastik fehl am Platz. Vormathematische Ideen und außermathematische Problemstellungen werden deshalb in unserem Buch in viel weiterem Umfang ernstgenommen, als es in Mathematikbüchern sonst üblich ist. Es genügt uns nicht, durch angehängte „Anwendungen" mathematische Begriffe zu legitimieren; wir wollen viel eher anhand beispielhafter Fragestellungen die Entwicklung der Begriffe nachzeichnen. So liegt uns z. B. daran, zu zeigen, daß zentrale Begriffe der Stochastik, wie Wahrscheinlichkeit, Verteilung, Zufallsgröße, Erwartung, Entropie, usw. mehrere Wurzeln haben und von daher verschiedene Bedeutungsschattierungen in sich tragen. Kombinatorik, statistische Physik, Markov-Ketten, beschreibende Statistik und Entscheidungstheorie sind mehr als nur Anwendungsfelder einer in sich ruhenden abgeschlossenen Theorie; aus ihnen kommen die Fragen, welche die Theorie haben entstehen lassen und lebendig erhalten. Diese Fragen werden von uns immer wieder von neuem auf verschiedenem technischen Niveau angegangen. Kurz gesagt: Wir beschränken uns nicht darauf, den Kanon der Schlußweisen zu lehren, sondern gehen immer wieder die Wege von der Modellbildung zur statistischen Prüfung von Hypothesen, und die Wege von den intuitiv erfaßten Entscheidungssituationen zu den mathematischen Strukturen.

Das Buch bleibt insofern auf einem elementaren Niveau, als keine raffinierten Sätze bewiesen werden. Der von uns beschrittene Weg fordert aber doch vom Leser große Anstrengungen. Das Rückgrat der Darstellung muß in der Entwicklung der Probleme und nicht im Geflecht der Sätze und Definitionen gesucht werden. Manche theoretischen Begriffe wie Zufallsgröße und Unabhängigkeit werden lange schon in Sprechweisen benutzt, ehe sie in einer Definition so scharf gefaßt werden, daß man mit ihnen rechnerisch umgehen kann. Manche Sätze, wie z. B. das starke Gesetz der großen Zahlen oder der zentrale Grenzwertsatz in der Fassung von Lindeberg-Lévy, fehlen völlig. (Das erstere, weil es auf einem elementaren Niveau leicht als eine Stütze der frequentistischen Auffassung von Wahrscheinlichkeit mißverstanden wird. Ein adäquates Verständnis setzt eine gründliche Beschäftigung mit dem Begriff der Fastgleichheit von Zufallsgrößen (bzgl. einer Familie von Hypothesen) voraus. Zentrale Grenzwertsätze ohne explizite Fehlerabschätzung haben geringen praktischen Wert. Dieses Buch schien uns nicht der richtige Platz, ihre mathematische Schönheit oder ihre doch recht diffizile Verzahntheit mit stochastischer Argumentation herauszuarbeiten.) Sonst haben wir bei der Auswahl der Themen auch versucht, Rücksicht auf die derzeitigen Lehrpläne der Gymnasien zu nehmen, und vieles, was auf der Oberstufe derzeit empfohlen wird, wenigstens kurz anzudeuten. Wir hoffen, damit dem künftigen Lehrer eine Orientierungshilfe bei Fragen seiner Stoffauswahl zu geben.

Ein erster Eindruck von der Stochastik sollte sich für den Anfänger aus den folgenden Abschnitten ergeben: I. §§ 1, 2, 3, 5, 9, 10 und II. §§ 1, 2, 9, 11. Weniger Stochastik, dafür umsomehr Analysis enthalten die Abschnitte I. §§ 4, 8 und II. §§ 7, 13. Besonders den physikalisch interessierten Leser versuchen wir anzusprechen mit I. §§ 6, 7, 11 A und II. § 3, 10. Graphen und Bäume spielen eine zentrale Rolle in I. §§ 10, 11, 13 und II. §§ 4, 9. Maß- und Integrationstheorie, für manche Autoren das Herzstück der Stochastik, wird bei uns nur referiert: II. §§ 5, 7, 8, 10.

Die Abschnitte sind in Gruppen eingeteilt. Innerhalb jeder Gruppe bemühen wir uns um ein im engeren Sinne statistisches Prinzip: Maximum Likelihood (I. § 3), Konfidenzbereiche (I. § 5), Signifikanztest (I. § 9), Likelihoodquotienten (I. § 12), Stichprobenverfahren (II. § 2), Risikofunktionen (II. § 6), a posteriori Verteilungen (II. § 12).

Eine bereits angesprochene Eigenart des Buches besteht in den vielen ausführlichen Zitaten aus alten Abhandlungen über den Zufall und die Wahrscheinlichkeit. Wir wollen damit nicht die Autorität der berümten Väter der Stochastik in Anspruch nehmen. Im Gegenteil, die damaligen Auffassungen haben sich in vielen Punkten als revisionsbedürftig erwiesen. Da diese sozusagen „natürlichen" Auffassungen aber in den landläufigen Meinungen über Zufall und Unsicherheit fortleben, muß sich der Stochastiker und speziell der Lehrer, der Anknüpfungspunkte an naive beim Schüler vorhandene Auffassungen sucht, mit ihnen auseinandersetzen.

Einige Abschnitte enthalten ausführlichere allgemeinphilosophische Anmerkungen zu den zentralen theoretischen Begriffen unserer Theorie: Wahrscheinlichkeit (I. §§ 1, 9), Unabhängigkeit (I. § 10), Erwartungswert (II. § 1), Entropie (II. §§ 3, 4).

Unsere Kritik an einigen von anderen Autoren vorgeschlagenen Grundbegriffen findet sich insbesondere in I. § 9 („wahre Wahrscheinlichkeit"), II. § 11 („inverse Wahrscheinlichkeiten", „Wahrscheinlichkeit unbekannter Ursachen") und II. § 12 („Likelihood").

Wir folgen einem bequemen Brauch unter Lehrbuchautoren, wenn wir Quellen nicht nennen, aus denen wir schöpfen. Das meiste ist schon oft dargestellt worden, daß wir gar nicht wüßten, ob wir lieber eine sehr alte oder eine sehr gelungene Darstellung zitieren wollten. Bei anderen Überlegungen hätte es uns einige Anstrengung gekostet uns zu erinnern, wo wir diese Ideen gehört oder gelesen haben. Wenn der Leser doch Neuigkeiten entdecken sollte, dann wird das vermutlich daran liegen, daß unsere Denk- und Sprechgewohnheiten natürlich nicht in allen Punkten mit denjenigen älterer Autoren übereinstimmen. Im übrigen wollten wir das Buch nicht durch Spezialitäten interessant machen. In Anhängen zu einigen Kapiteln oder Gruppen von Kapiteln haben wir Hinweise für eine vertiefte weitere Beschäftigung mit dem jeweiligen Thema gegeben; für einen bereits weiter fortgeschrittenen Leser enthalten diese Anhänge auch Verbindungen zu anderen Gebieten der Mathematik (oder Physik), von denen her sich das hier Dargestellte neu sehen läßt.

Bleibt die gern erfüllte Pflicht, unseren Dank an alle auszudrücken, die uns durch ihren Rat zur Hand gegangen sind oder uns ermutigt haben, unser Konzept weiter zu verfolgen. Besonders genannt seien M. Otte, dem wir wichtige Anregungen zur didaktischen Konzeption des Buches verdanken und alle die Teilnehmer am statistischen Kolloquium Frankfurt-Heidelberg, die über die Jahre unsere Vorstellungen von Stochastik mitgeformt haben, D. W. Müller an der Spitze. Unser Dank gilt ebenso Herrn D. Alfers für seine Hilfe und Frau M. Schmidt in Frankfurt für das geduldige und sorgfältige Schreiben diverser Vorstufen und Fassungen des Manuskripts. Mögen die Leser entscheiden, ob der Aufwand gerechtfertigt war.

Frankfurt/Main, Heidelberg im Frühjahr 1981 H. Dinges, H. Rost

# Inhalt