

# **Einstieg in die Wirtschaftsmathematik**

Von Prof. Dr. rer. nat. habil. Bernd Luderer  
und Dr. rer. nat. Uwe Würker  
Techn. Universität Chemnitz-Zwickau

Mit zahlreichen Abbildungen, anwendungsorientierten  
Beispielen und Übungsaufgaben mit Lösungen



B. G. Teubner Stuttgart 1995

Prof. Dr. rer. nat. habil. Bernd Luderer

Geboren 1949 in Chemnitz. Von 1967 bis 1972 Studium der Mathematik, 1972 Diplom an der TH Karl-Marx-Stadt. Von 1972 bis 1975 Aspirantur, 1976 Promotion an der Lomonossow-Universität Moskau. 1975 wiss. Assistent, 1979 Oberassistent TU Karl-Marx-Stadt. Studienaufenthalte 1980 Banachzentrum Warschau, 1983 Lomonossow-Universität Moskau. 1988 Habilitation, 1989 Dozent, 1992 Professor TU Chemnitz-Zwickau.

Dr. rer. nat. Uwe Würker

Geboren 1963 in Glauchau/Sa. Von 1982 bis 1987 Studium der Mathematik, 1987 Diplom an der TU Karl-Marx-Stadt. Von 1987 bis 1990 Forschungsstudium, 1991 Promotion, 1990 wiss. Assistent an der TU Chemnitz-Zwickau.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

**Luderer, Bernd:**

Einstieg in die Wirtschaftsmathematik : mit  
anwendungsorientierten Beispielen und Übungsaufgaben mit  
Lösungen / von Bernd Luderer und Uwe Würker. – Stuttgart :  
Teubner, 1995

(Teubner-Studienbücher : Mathematik)

ISBN 978-3-519-02098-1

ISBN 978-3-322-94820-5 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-94820-5

NE: Würker, Uwe:

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt besonders für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

© B. G. Teubner Stuttgart 1995

Für Ludmila und Swetlana

Für meine Eltern

# Vorwort

Mathematik als propädeutisches Fach am Beginn eines wirtschaftswissenschaftlichen Studiums: Was soll gelehrt werden? Wie soll gelehrt werden? Wie umfangreich darf oder muß der Inhalt sein? Soviele Personen, soviele Meinungen wird es dazu geben.

Bei der Konzeption des vorliegenden Buches und somit bei der Beantwortung der aufgeworfenen Fragen sind wir zum einen von den Gegebenheiten des Studiums der Wirtschaftswissenschaften an der Technischen Universität Chemnitz–Zwickau ausgegangen, das lediglich ein Semester zuzüglich eines einwöchigen Vorkurses vor dem eigentlichen Studienbeginn umfaßt. Zum anderen sind unsere langjährigen Lehrerfahrungen eingeflossen. Beides führte zu folgenden, in diesem Lehrbuch realisierten Positionen:

- **Mathematik muß verständlich, aber korrekt gelehrt werden.** Will heißen: Im Vordergrund steht der „Normalfall“ einer Formel, eines Algorithmus, einer mathematischen Aussage; Sonderfälle, Entartungen, notwendige Voraussetzungen werden besprochen, aber nicht in den Vordergrund geschoben.
- **Ein Wirtschaftswissenschaftler soll Mathematik anwenden.** Will heißen: Er muß wissen, was Mathematik ist und kann. Er muß wichtige mathematische Begriffe kennen und sicher beherrschen. Er muß fundamentale Lösungsmethoden kennen und an kleinen Beispielen ausprobieren, um deren wichtigste Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten nutzen und ihre Grenzen einschätzen zu können. Er muß gewisse Fertigkeiten im Umgang mit der Mathematik als „Handwerkszeug“ für wirtschaftswissenschaftliche Untersuchungen erwerben. Er soll aber nicht unbedingt die mathematische Theorie weiterentwickeln. Deshalb stehen auch die Demonstration mathematischer Aussagen an Beispielen im Vordergrund, während Beweise sehr kurz weggelassen werden und nur exemplarischen Einblick in mathematische Denkweisen gewähren. Ein Wirtschaftswissenschaftler muß sich aber dessen bewußt sein, daß man Mathematik niemals bedenkenlos anwenden darf, daß man — wie in jeder Wissenschaft — an bestimmte Gültigkeitsvoraussetzungen gebunden ist.
- **Die Anwendung mathematischer Methoden in Wirtschaftswissenschaft und –praxis geht vom Wirtschaftswissenschaftler aus.** Will heißen: Der zukünftige Absolvent muß neben profunder Kenntnis seines Faches und grundlegenden Kenntnissen in Mathematik in der Lage sein, ökonomische Probleme in der Sprache der Mathematik zu formulieren, er muß abschätzen können, inwieweit die Mathematik zur Lösung oder Lösungsunterstützung des betreffenden Problems beitragen kann, und er muß die mittels mathematischer Methoden erhaltenen Resultate ökonomisch interpretieren und umsetzen können. In der Praxis wird er hierbei natürlich vom Mathematiker nicht im Stich gelassen. Diesem Ziel dienen im Buch die Untersuchung der vielfältigsten wirtschaftswissenschaftlichen Fragestellungen und ihre Umsetzung in mathematische Formulierungen — kurzum, die Modellierung komplexer Sachverhalte.

• **Ein Wirtschaftswissenschaftler sollte von der Wichtigkeit der Mathematik überzeugt sein.** Will heißen: Er muß sehen, wo und wie ihm mathematische Lösungsmethoden bei der Untersuchung der ihn interessierenden Fragen helfen können. Dieses Anliegen wird im Buch dadurch realisiert, daß die behandelten mathematischen Themen an vielen Anwendungsbeispielen illustriert werden und daß großer Wert auf die Interpretation der erzielten Ergebnisse gelegt wird.

Die Darlegungen des Buches berücksichtigen natürlich, daß ein Student im 1. Semester noch kein fertig ausgebildeter Wirtschaftswissenschaftler ist. Deshalb werden sehr spezielle Fachtermini vermieden. Zur Anregung der selbständigen Beschäftigung mit dem behandelten Stoff werden dafür eine große Zahl an Übungsaufgaben gestellt, von denen in der Regel auch die Lösungen im Anhang zu finden sind. Schließlich ist die Vielzahl im Buch enthaltener Abbildungen dazu gedacht, das Vorstellungsvermögen anzuregen und zu verbessern.

Das vorliegende Lehrbuch vereint gewissermaßen drei in einem: einen Vorkurs zum Erwerb oder zur Festigung von Abiturkenntnissen, den eigentlichen Grundkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, der die Gebiete Lineare Algebra, Lineare Optimierung und Analysis mehrerer Veränderlicher umfaßt, sowie eine relativ umfangreiche Einführung in die Finanzmathematik. Nicht unerwähnt sollte bleiben, daß das Buch so angelegt ist, daß es sich auch vorzüglich zum Selbststudium eignet.

Bei der Durchsicht des vorliegenden Werkes war uns Frau Natalija Andreeva behilflich. Dank gilt auch Herrn Dr. Dempe für nützliche Diskussionen sowie Herrn Dr. Spuhler und Herrn J. Weiß vom Teubner-Verlag für die stets verständnisvolle Zusammenarbeit.

Wir hoffen auf positive Aufnahme des Lehrbuches durch die Leser und sind für Hinweise und Anregungen, die zu seiner Verbesserung beitragen, dankbar.

Bernd Luderer, Uwe Würker

Chemnitz, Januar 1995

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>5</b>
<b>Zeichenerklärung</b>	<b>12</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>13</b>
1.1 Instrumente der Elementarmathematik . . . . .	13
1.1.1 Zahlbereiche. Zahlendarstellung . . . . .	13
1.1.2 Rechnen mit Zahlen . . . . .	15
1.1.3 Bruchrechnung . . . . .	18
1.1.4 Potenzrechnung . . . . .	20
1.1.5 Binomische Formeln. Partialdivision . . . . .	22
1.1.6 Wurzelrechnung . . . . .	26
1.1.7 Logarithmenrechnung . . . . .	27
1.1.8 Rechenregeln und Auflösung von Gleichungen . . . . .	29
1.1.9 Koordinatensysteme . . . . .	33
1.1.10 Winkelbeziehungen . . . . .	35
1.1.11 Komplexe Zahlen . . . . .	36
1.2 Darstellung von Funktionen einer Variablen . . . . .	38
1.2.1 Formen der Darstellung . . . . .	40
1.2.2 Operationen mit Funktionen . . . . .	41
1.2.3 Wichtige spezielle Funktionen . . . . .	44
1.3 Ergänzende Fragen . . . . .	57
1.3.1 Intervalle . . . . .	57
1.3.2 Auflösung von Ungleichungen . . . . .	58
1.3.3 Absolute Beträge . . . . .	60
1.4 Analytische Geometrie . . . . .	62
1.4.1 Geradengleichungen in der Ebene . . . . .	62
1.4.2 Geraden und Ebenen im Raum . . . . .	67
1.4.3 Graphische Darstellung von Ungleichungssystemen . . . . .	69
1.5 Zahlenfolgen und Zahlenreihen . . . . .	71
1.5.1 Grundbegriffe . . . . .	71
1.5.2 Arithmetische Folgen und Reihen . . . . .	72
1.5.3 Geometrische Folgen und Reihen . . . . .	73

<b>2</b>	<b>Logik und Mengenlehre</b>	<b>75</b>
2.1	Aussagenlogik . . . . .	75
2.1.1	Aussagen . . . . .	75
2.1.2	Aussagenverbindungen . . . . .	77
2.1.3	Quantoren . . . . .	80
2.1.4	Einfache Schlußweisen . . . . .	81
2.2	Mengenlehre . . . . .	83
2.2.1	Grundbegriffe . . . . .	83
2.2.2	Mengenrelationen . . . . .	85
2.2.3	Mengenoperationen . . . . .	86
2.2.4	Abbildungen und Funktionen . . . . .	88
<b>3</b>	<b>Finanzmathematik</b>	<b>92</b>
3.1	Zins- und Zinseszinsrechnung . . . . .	92
3.1.1	Einfache Verzinsung . . . . .	93
3.1.2	Zinseszinsrechnung . . . . .	96
3.1.3	Grundaufgaben der Zinseszinsrechnung . . . . .	97
3.1.4	Kapitalwertmethode . . . . .	99
3.1.5	Gemischte Verzinsung . . . . .	100
3.1.6	Unterjährige Verzinsung . . . . .	102
3.2	Rentenrechnung . . . . .	104
3.2.1	Grundbegriffe der Rentenrechnung . . . . .	104
3.2.2	Vorschüssige Renten . . . . .	105
3.2.3	Nachschüssige Renten . . . . .	106
3.2.4	Grundaufgaben der Rentenrechnung . . . . .	108
3.2.5	Ewige Rente . . . . .	109
3.3	Tilgungsrechnung . . . . .	111
3.3.1	Grundbegriffe. Formen der Tilgung . . . . .	111
3.3.2	Ratentilgung . . . . .	112
3.3.3	Annuitätentilgung . . . . .	113
3.3.4	Tilgungspläne . . . . .	115
3.4	Renditerechnung . . . . .	116
<b>4</b>	<b>Lineare Algebra</b>	<b>121</b>
4.1	Matrizen. Vektoren. Vektorräume . . . . .	121
4.1.1	Begriff der Matrix . . . . .	121
4.1.2	Spezielle Matrizen . . . . .	122
4.1.3	Matrizenrelationen . . . . .	125
4.1.4	Operationen mit Matrizen . . . . .	126
4.2	Matrizenmultiplikation . . . . .	130
4.2.1	Skalarprodukt . . . . .	130

4.2.2	Produkt von Matrizen . . . . .	131
4.2.3	Eigenschaften der Matrizenmultiplikation . . . . .	133
4.2.4	Anwendungen der Matrizenmultiplikation . . . . .	134
4.3	Lineare Gleichungssysteme (LGS) . . . . .	141
4.3.1	Begriff des linearen Gleichungssystems . . . . .	141
4.3.2	Darstellungsformen von LGS . . . . .	142
4.3.3	Begriff der Lösung eines LGS . . . . .	144
4.3.4	Lineare Gleichungssysteme mit Einheitsmatrix . . . . .	146
4.3.5	Elementare Umformungen eines LGS . . . . .	148
4.4	Gaußscher Algorithmus . . . . .	148
4.4.1	Anwendung elementarer Umformungen . . . . .	149
4.4.2	Ablaufplan des Gaußschen Algorithmus . . . . .	152
4.4.3	Lösungsdarstellung . . . . .	153
4.4.4	Numerische Aspekte . . . . .	155
4.4.5	Zusammenfassende Bemerkungen . . . . .	156
4.5	Lineare Unabhängigkeit . . . . .	158
4.5.1	Linearkombination . . . . .	159
4.5.2	Begriff der linearen Unabhängigkeit . . . . .	161
4.5.3	Basis und Rang . . . . .	164
4.5.4	Zur Lösungsstruktur linearer Gleichungssysteme . . . . .	167
4.6	Matrizeninversion . . . . .	169
4.6.1	Definition der inversen Matrix . . . . .	169
4.6.2	Anwendungen der Matrizeninversion . . . . .	172
4.7	Determinanten . . . . .	177
4.7.1	Definition der Determinante . . . . .	177
4.7.2	Eigenschaften von Determinanten . . . . .	180
4.7.3	Anwendungen der Determinantenrechnung . . . . .	183
4.7.4	Definitheit von Matrizen . . . . .	185
4.7.5	Zusammenfassende Bemerkungen . . . . .	187
<b>5</b>	<b>Lineare Optimierung</b>	<b>189</b>
5.1	Gegenstand der Linearen Optimierung . . . . .	190
5.1.1	Betrachtung einer Modellsituation . . . . .	191
5.1.2	Bestandteile einer LOA. Lösungsbegriff . . . . .	192
5.2	Modellierung und graphische Lösung von LOA . . . . .	194
5.2.1	Modellierung typischer Problemstellungen . . . . .	195
5.2.2	Graphische Lösung von LOA . . . . .	201
5.3	Theorie der Linearen Optimierung . . . . .	211
5.3.1	Überführung in die Gleichungsform . . . . .	211
5.3.2	Basislösungen und Eckpunkte . . . . .	216



5.3.3	Eigenschaften von LOA . . . . .	219
5.4	Simplexmethode für Optimierungsaufgaben in Gleichungsform . . . . .	220
5.4.1	Grundidee . . . . .	220
5.4.2	Auswahl der aufzunehmenden Basisvariablen . . . . .	223
5.4.3	Auswahl der auszuschließenden Basisvariablen . . . . .	225
5.4.4	Ablaufplan des Simplexalgorithmus . . . . .	227
5.4.5	Beispiele. Rechenkontrollen . . . . .	230
5.4.6	Sonderfälle . . . . .	234
5.5	Zwei-Phasen-Methode . . . . .	237
5.5.1	Grundidee . . . . .	238
5.5.2	Mögliche Fälle . . . . .	239
5.5.3	Beispiele . . . . .	241
5.6	Dualität in der Linearen Optimierung . . . . .	243
5.6.1	Konstruktion der dualen Aufgabe . . . . .	244
5.6.2	Dualitätsbeziehungen . . . . .	246
5.6.3	Ökonomische Interpretation der Dualvariablen . . . . .	249
<b>6</b>	<b>Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen</b>	<b>255</b>
6.1	Grenzwert und Stetigkeit . . . . .	255
6.1.1	Grenzwerte von Zahlenfolgen . . . . .	256
6.1.2	Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen . . . . .	259
6.1.3	Stetigkeit . . . . .	261
6.1.4	Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	263
6.2	Differenzen- und Differentialquotient . . . . .	264
6.2.1	Der Begriff des Differentialquotienten . . . . .	266
6.2.2	Differential . . . . .	269
6.2.3	Differentiationsregeln. Höhere Ableitungen . . . . .	270
6.3	Charakterisierung von Funktionen mittels Ableitungen . . . . .	274
6.3.1	Monotonie und Beschränktheit . . . . .	274
6.3.2	Extremwerte . . . . .	277
6.3.3	Wendepunkte. Krümmungsverhalten . . . . .	281
6.3.4	Kurvendiskussion . . . . .	285
6.3.5	Beispiele zur Kurvendiskussion . . . . .	287
6.3.6	Anwendungen in der Marginalanalyse . . . . .	291
6.4	Numerische Methoden der Nullstellenberechnung . . . . .	297
6.4.1	Intervallhalbierung . . . . .	298
6.4.2	Sekantenverfahren. Regula falsi . . . . .	300
6.4.3	Newtonverfahren . . . . .	301

<b>7 Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>303</b>
7.1 Begriff und Beispiele . . . . .	303
7.1.1 Funktionsbegriff . . . . .	303
7.1.2 Beispiele für Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	305
7.2 Grenzwert und Stetigkeit . . . . .	308
7.3 Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	314
7.3.1 Begriff der Differenzierbarkeit . . . . .	314
7.3.2 Partielle Ableitungen und Elastizitäten . . . . .	315
7.3.3 Gradient einer Funktion. Verschiedene Interpretationen . . . . .	319
7.3.4 Partielle Ableitungen höherer Ordnung. Hessian . . . . .	323
7.3.5 Vollständiges Differential . . . . .	324
7.3.6 Implizite Funktionen . . . . .	326
<b>8 Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>331</b>
8.1 Extremwerte ohne Nebenbedingungen . . . . .	331
8.1.1 Notwendige und hinreichende Extremwertbedingungen . . . . .	332
8.1.2 Beispiele . . . . .	336
8.2 Extremwerte unter Nebenbedingungen . . . . .	338
8.2.1 Allgemeine Aufgabenformulierung . . . . .	339
8.2.2 Die Eliminationsmethode . . . . .	340
8.2.3 Lagrange-Methode . . . . .	346
8.2.4 Interpretation der Lagrangeschen Multiplikatoren . . . . .	354
8.3 Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	355
8.3.1 Problemstellung. Lineare Regression . . . . .	355
8.3.2 Allgemeinere Ansatzfunktionen . . . . .	362
<b>9 Integralrechnung</b>	<b>365</b>
9.1 Das unbestimmte Integral . . . . .	366
9.1.1 Integration von Funktionen einer Veränderlichen . . . . .	366
9.1.2 Integrationsregeln . . . . .	367
9.2 Das bestimmte Integral . . . . .	369
9.2.1 Integralbegriff für Funktionen einer Variablen . . . . .	369
9.2.2 Integrierbarkeit. Eigenschaften bestimmter Integrale . . . . .	371
9.2.3 Numerische Integration . . . . .	373
9.2.4 Uneigentliche Integrale . . . . .	376
9.2.5 Doppelintegral . . . . .	378
9.3 Anwendungen der Integralrechnung . . . . .	380
<b>A Lösungen zu den Aufgaben</b>	<b>384</b>
<b>B Klausurbeispiel</b>	<b>403</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>409</b>
<b>Sachverzeichnis</b>	<b>410</b>

# Zeichenerklärung

$\mathbb{N}$	– Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	– Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	– Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	– Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	– Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	– Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}^n$	– Menge der $n$ -dimensionalen Vektoren bzw. $n$ -Tupel reeller Zahlen
$ x $	– absoluter Betrag der reellen Zahl $x$
$\ x\ $	– Norm des Vektors $x$
$\stackrel{!}{=} ; \stackrel{\text{def}}{=}$	– Gleichheit per Forderung; Gleichheit per Definition
$\iff$	– Äquivalenz von Aussagen; genau dann, wenn
$\implies$	– Implikation; aus ... folgt ...
$\forall$	– für alle; für beliebige
$\exists$	– es existiert; es gibt
$\emptyset$	– leere Menge
$\{x \mid E(x)\}$	– Menge aller Elemente $x$ mit der Eigenschaft $E(x)$
$p$	– Zinssatz, Zinsfuß
$i$	– Zinsrate; imaginäre Einheit
$q$	– Aufzinsungsfaktor
$K_t$	– Kapital zum Zeitpunkt $t$
$B_n^{\text{vor}}, B_n^{\text{nach}}$	– Barwert der vorschüssigen (nachsüssigen) Rente
$E_n^{\text{vor}}, E_n^{\text{nach}}$	– Endwert der vorschüssigen (nachsüssigen) Rente
$S_k$	– Restschuld am Ende der $k$ -ten Periode
$A_k$	– Annuität in der $k$ -ten Periode
$Z_k$	– Zinsen in der $k$ -ten Periode
$T_k$	– Tilgung in der $k$ -ten Periode
$A^{-1}$	– inverse Matrix
$A^\top$	– transponierte Matrix
$\text{rang } A$	– Rang der Matrix $A$
$\det A,  A $	– Determinante der Matrix $A$
$\langle a, b \rangle$	– Skalarprodukt der Vektoren $a$ und $b$
$E, e_j$	– Einheitsmatrix, $j$ -ter Einheitsvektor
$x_B, x_N$	– Vektor der Basisvariablen (Nichtbasisvariablen)
$\Delta_j$	– Optimalitätsindikatoren
$\frac{\partial f}{\partial x_j}, f_{x_j}$	– partielle Ableitungen erster Ordnung
$\nabla f(x)$	– Gradient der Funktion $f$ im Punkt $x$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, f_{x_i x_j}$	– partielle Ableitungen zweiter Ordnung
$H_f(x)$	– Hessematrix der Funktion $f$ im Punkt $x$
$\varepsilon_{f, x_i}$	– (partielle) Elastizität von $f$