

# **Finite Systemtheorie**

Von Dr.-Ing. W. Klein  
o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt

1976. Mit 56 Bildern



**B. G. Teubner Stuttgart**

**Prof. Dr.-Ing. Wilhelm Klein**

Geboren 1910 in Bant (jetzt Wilhelmshaven),  
1928 - 1933 Studium der Elektrotechnik an  
der Technischen Hochschule Berlin, Dipl.-Ing.,  
1933 - 1935 wiss. Mitarbeiter am Versuchsfeld  
für Werkzeugmaschinen der gleichen Hochschule,  
1937 Promotion, 1935 - 1945 Postreferendar,  
Bauassessor, Postassessor, Postrat bei der  
Deutschen Reichspost, 1946 - 1958 wiss. Mit-  
arbeiter im Heinrich-Hertz-Institut Berlin,  
1952 Habilitation, 1960 außerplanmäßiger Profes-  
sor, 1958 - 1964 Postrat, Oberpostrat bei der  
Deutschen Bundespost, 1964 o. Professor an der  
Technischen Hochschule Darmstadt.

Arbeitsgebiet: Allgemeine Nachrichtentechnik

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Klein, Wilhelm

Finite Systemtheorie. - 1. Aufl. - Stuttgart :  
Teubner, 1976.

(Teubner-Studienbücher : Elektrotechnik)

ISBN 978-3-519-06106-9

ISBN 978-3-322-94748-2 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-94748-2

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die da-  
durch begründeten Rechte, besonders die der Über-  
setzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der  
Funksendung, der Wiedergabe auf photomechan-  
ischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und  
Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben,  
auch bei der Verwertung von Teilen des Werkes,  
dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Verfielfäl-  
tigung ist an den Verlag gemäß § 54 UrhG eine  
Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag  
zu vereinbaren ist.

© B. G. Teubner, Stuttgart 1976

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1976

Umschlaggestaltung: W. Koch, Sindelfingen

## VORWORT

Die zeitdiskreten Systeme, die in der Nachrichtentechnik und in der Regelungstechnik eine ständig wachsende Bedeutung bekommen, werden heute gewöhnlich durch die (infinite) Z-Transformation beschrieben. Gegenstand dieses Buches ist im Gegensatz dazu eine finite Beschreibung dieser Systeme (ohne die Begriffe "kontinuierlich", "unendlich" und "konvergent"), die unmittelbar auf dem Digitalrechner implementierbar ist. Das wird dadurch möglich, daß man die Zeitfunktionen als periodische Impulsfolgen annimmt.

Das Buch ist das erweiterte Skriptum einer Vorlesung, die ich seit 1972 an der Technischen Hochschule Darmstadt halte. Abgesehen von § 1, der einen kurzen Überblick über die konventionelle infinite Systemtheorie gibt, ist an mathematischen Vorkenntnissen lediglich die Matrizenalgebra erforderlich.

Ich danke den Herren Dr.-Ing. Hermann Kremer und Dipl.-Ing. Raimund Lück er für fruchtbare Diskussionen und für die kritische Durchsicht des Manuskripts.

Darmstadt, im Sommer 1976

Wilhelm Klein

"Man kann die Ingenieure bedauern, die es so lange aufgeschoben haben, sich mit der Laplace-Transformation zu befreunden, bis sie ins Museum verwiesen wurde. Aber so etwas ist schon öfter geschehen. Wir Mathematiker werden auch für unsere Fahrlässigkeit bestraft: Unsere Strafe ist die Aufgabe, ihnen die Laplace-Transformation nun wieder auszutreiben."

Der Mathematiker Hans Freudenthal im Jahre 1958 [9.8].

INHALT	Seite
§ 1. Überblick über die infinite Systemtheorie	1
1.1. Der Begriff des Systems	1
1.2. Infinite und finite Systemtheorie	2
1.3. Der Zeitbereich	6
1.3.1. Impuls und Impulsantwort	6
1.3.2. Das Faltungsintegral	6
1.4. Der Frequenzbereich	9
1.4.1. Die Fouriertransformation	9
1.4.2. Die Laplacetransformation	11
1.5. Der Z-Bereich	14
§ 2. Der finite Zeitbereich	17
2.1. Zeitdiskrete Systeme	17
2.2. Die Pulsantwort und die zyklische Faltung	17
2.3. Zusammenhang mit der klassischen Systemtheorie	19
2.4. Die Z-Koeffizienten	20
2.5. Ermittlung der Ausgangsfunktion $\underline{y}$ aus der Eingangsfunktion $\underline{x}$ und den Z-Koeffizienten	22
2.6. Systemidentifikation bei überlappten Perioden	23
2.7. Dreiecksfaltung	26
2.8. Das Überlappen der Impulsantworten	31
2.9. Systemidentifikation bei nichtüberlappten Perioden	32
2.10. Systemidentifikation bei fehlerhaften Meßwerten und unbekanntem Systemgrad	33
2.11. Realisierungen	36
2.11.1. Die verwendeten Schaltelemente	36
2.11.2. Zusammenschaltungsregeln für zeitdiskrete Systeme	39
2.11.3. Realisierung der Übertragungsmatrix im Zeitbereich	41
§ 3. Der finite Z-Bereich	
3.1. Die finite Z-Systemfunktion in der Quotientenform	43
3.2. Z-Systemfunktion und Impulsantwort	45
3.3. Zahlenbeispiel	47
3.4. Finite Z-Transformation mit komplexen Frequenzen	49
3.5. Die finite Laplacesystemfunktion in Produktform	56
3.6. Die Stabilität des Systems	57
§ 4. Anwendungen der finiten Fouriertransformation	
4.1. Die Schnelle Fouriertransformation	60
4.2. Die reelle finite Fouriertransformation	60
4.2.1. Die reelle Fouriermatrix	60
4.2.2. Realisierung der reellen Fouriermatrix	65
4.3. Die Hauptachsentransformation von Toeplitzmatrizen	67
4.3.1. Die Toeplitzmatrix	67
4.3.2. Die Leitungsbildung beim Sternvierer	68
4.4. Schaltungen mit linearer Phase	72

	Seite
§ 5. Interpolation und Abtastung	74
5.1. Bezeichnungen	74
5.2. Der ideale Abtaster	75
5.3. Das finite Abtasttheorem	77
5.4. Die frequenzbegrenzte Interpolationsfunktion	79
5.5. Zahlenbeispiel	82
5.6. Zeitkontinuierliche Interpolation	84
5.7. Abtastung einer zeitkontinuierlichen Funktion	86
§ 6. Analyse und Synthese zeitdiskreter Systeme	89
6.1. Das Analyseverfahren	89
6.1.1. Die Signalflußgleichungen	90
6.1.2. Die Strukturregel der Signalflußmatrix	93
6.1.3. Die Knotenreduktion	94
6.1.4. Die schrittweise Knotenreduktion	96
6.1.5. Beispiel einer Knotenreduktion	97
6.2. Das transponierte System	98
§ 7. Der Tangensfrequenzbereich	102
7.1. Die zyklischen Differenzenmatrizen	102
7.2. Die Systemfunktion im Tangensfrequenzbereich	104
7.3. Der Zusammenhang zwischen der Z-Systemfunktion und der Systemfunktion im Tangensfrequenzbereich	107
7.4. Angenäherte Berechnung der Impulsantwort eines zeitkontinuierlichen Systems	109
7.5. Entwurf eines zeitdiskreten Systems aus einem ge- gebenen Toleranzschema	111
§ 8. Streifen-Dreiecksmatrizen	116
8.1. Die Dreiecks-Differenzenmatrizen	116
8.2. Die Differenzenform der Differenzgleichung	117
8.3. Die Lösung der Differenzgleichung	120
8.4. Der Austausch der Anfangswerte	120
8.5. Beispiel: Die Differenzgleichung der Fibonacci'schen Zahlen	121
8.5.1. Definition und konventionelles Lösungsver- fahren	121
8.5.2. Die Summenschreibweise der Differenzen- gleichung	122
8.5.3. Die Differenzenform der Differenzglei- chung	124
§ 9. Die Operatorenrechnung	
9.1. Die Heavisidesche Operatorenrechnung und ihre exakten Begründungen	128
9.2. Lösung der Differentialgleichung (2) mit der finiten Systemtheorie	130
9.3. Die finite Operatorenrechnung	131

	Seite
§ 10. Die Hilberttransformation	133
10.1. Der zeitdiskrete zeitinvariante Hilberttransformator	133
10.2. Die Hilbertmatrix für ungerade $N$	137
10.3. Die Hilbertmatrix für gerade $N$	138
10.4. Zahlenbeispiel	138
10.5. Der zeitdiskrete zeitvariante Hilberttransformator	142
10.6. Die infinite Hilberttransformation	145

### Anhang 1: Definitionen und Rechenregeln der finiten Systemtheorie

I. Vektoren und Matrizen mit zyklischen Indexen	A1
1. Vektoren mit zyklischem Index	A1
2. Die zyklische Matrix	A4
3. Die Hauptachsentransformation der zyklischen Matrix	A5
4. Die Z-Transformationsmatrix (Laplacematrix)	A8
5. Die Fouriermatrix	A9
6. Die Diskrete Fouriertransformation	A10
7. Zusammenhang zwischen finiter und infiniter Systemtheorie	A12
7.1. Die endliche Fourierreihe	A13
7.2. Die unendliche Fourierreihe	A15
7.3. Das Fourierintegral und das Laplaceintegral	A15
7.4. Die finite und die infinite Z-Transformation	A16
8. Die Schnelle Fouriertransformation	A18
9. Rechenregeln für zyklische Matrizen	A20
10. Die zyklische Faltung	A21
11. Die zyklische Entfaltung	A21
12. Die zyklischen Differenzenmatrizen	A22
13. Polynomentwicklung einer zyklischen Matrix	A22
14. Faktorisierung einer zyklischen Matrix	A23
15. Partialbruchzerlegung der Inversen einer zyklischen Matrix	A23
16. Die Inverse einer zyklischen Matrix	A23
II. Streifen-Dreiecksmatrizen	A24
17. Die Dreiecksmatrix mit Streifenstruktur	A24
18. Rechenregeln für Streifendreiecksmatrizen	A24
19. Dreiecksfaltung	A25
20. Dreiecksentfaltung	A25
21. Polynomentwicklung einer Streifen-Dreiecksmatrix	A26
22. Faktorisierung einer Streifen-Dreiecksmatrix	A26
23. Partialbruchentwicklung der Inversen einer Streifen-Dreiecksmatrix	A27
24. Die Inverse einer Streifen-Dreiecksmatrix	A27
25. Die Dreiecks-Differenzenmatrizen	A27
26. Faktorisierung eines Differenzenpolynoms	A28
27. Partialbruchzerlegung der Inversen eines Differenzpolynoms	A28
28. Die Inverse eines Differenzenpolynoms	A28
29. Summierung einer Potenzfolge	A29

## VIII

<u>Anhang 2: Beweise</u>	Seite
1. Beweis der Formeln (A112) und (A113)	A31
2. Beweis der Formel (A118)	A32
3. Beweis der Strukturregel der Pascalmatrix Gl. (7.20)	A32
<u>Literatur</u>	A36
<u>Sachverzeichnis</u>	A39