vieweg studium
Grundkurs Mathematik

Diese Reihe wendet sich an den Studenten der mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Fächer. Ihm – und auch dem Schüler der Sekundarstufe II – soll die Vorbereitung auf Vorlesungen und Prüfungen erleichtert und gleichzeitig ein Einblick in die Nachbarfächer geboten werden. Die Reihe wendet sich aber auch an den Mathematiker, Naturwissenschaftler und Ingenieur in der Praxis und an die Lehrer dieser Fächer.

Zu der Reihe gehören folgende Abteilungen:

Basiswissen, Grundkurs und Aufbaukurs
Mathematik, Physik, Chemie, Biologie

Gerd Fischer

Analytische Geometrie

6., überarbeitete Auflage

Mit 129 Abbildungen

vieweg

Dr. rer. nat. Gerd Fischer ist ord. Professor
am Mathematischen Institut der Universität Düsseldorf
Anschrift: Universitätsstr. 1, 4 Düsseldorf 1

(Eine Kurzbiographie des Autors steht auf Seite 211)

Die Reproduktion von Abbildungen aus Albrecht Dürer,
Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit,
mit freundlicher Genehmigung des
Germanischen Nationalmuseums, Nürnberg

1.– 5. Tausend März 1978
6.–10. Tausend März 1979
11.–13. Tausend Mai 1983
14.–16. Tausend Oktober 1985
17.–19. Tausend September 1988
20.–22. Tausend Februar 1991
23.–25. Tausend März 1992

Ursprünglich erschienen bei Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH,
Braunschweig/Wiesbaden, 1992

Satz: Vieweg, Braunschweig
Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN 978-3-528-57235-8 ISBN 978-3-322-94382-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-94382-8

Inhaltsverzeichnis

Der euklidische Raum

Was mach ich armer Teufel bloß?
Nun bin ich alt und arbeitslos.
Ich diente viele hundert Jahr
ergeben, redlich, treu und wahr,
mit Umsicht, Tatkraft und Geschick
im hohen Hause der Physik.
Verdiente meinen guten Lohn.
Doch plötzlich war das alles aus.
Ein neuer Herr bezog das Haus.
Der sprach: „Ich geb Ihnen hiermit zu wissen:
Sie lassen leider ganz vermissen
die unumgängliche Präzision.
Die angenäherte Schlampigkeit,
die geht mir, das muß ich schon sagen, zu weit.
Sie können mir daher nicht weiter dienen,
und kurz und gut, ich kündige Ihnen
hiermit zum Ersten des folgenden Jahres."
Ich war ganz sprachlos, doch so war es.
Und finden Sie mich morgens mal
erhängt an einem Integral –
ach, reden hat ja keinen Zweck!
So ging der Raum betrübt hinweg.

aus Hubert Cremer [34]

Vorwort

Dieses Buch schließt an die „Lineare Algebra" (vieweg studium Band 17, stets zitiert als „L.A.") an. Es ist entstanden aus Vorlesungen für Studenten der Mathematik ab dem zweiten Semester. Ihnen sollte ein Eindruck vermittelt werden, wie sich der Formalismus der linearen Algebra anwenden läßt.

Im Vordergrund steht dabei die sogenannte „Analytische Geometrie". Nach dem heute üblichen Sprachgebrauch versteht man darunter den Teil der Geometrie, der mit Hilfsmitteln der linearen Algebra betrieben wird. Verwendung von höherer Algebra führt zur „algebraischen Geometrie", in der „Differentialgeometrie" werden geometrische Gebilde vom Standpunkt der Analysis untersucht. (Es sei bemerkt, daß solche Unterscheidungen, verbunden mit dem Streben nach „Reinheit der Methoden", der Geometrie insgesamt mehr geschadet als genützt haben.)

Im ersten Kapitel werden affine Räume eingeführt und einfache Eigenschaften von affinen Unterräumen und Quadriken hergeleitet. Mit Hilfsmitteln der linearen Algebra kann man auch Systeme linearer Ungleichungen untersuchen. Damit beschäftigt sich das zweite Kapitel über „lineare Optimierung". Hier wird besonderer Wert darauf gelegt, die geometrischen Hintergründe zu erläutern. Im dritten Kapitel wird schließlich versucht, den Leser davon zu überzeugen, daß ein tieferer Einblick in geometrische Zusammenhänge erst vom projektiven Standpunkt aus möglich wird.

Etwa so, wie es in gebildeten Kreisen gerne als ein Zeichen für Leute von Welt angesehen wird, nichts von Mathematik zu verstehen, ist mancher Mathematiker stolz darauf, nie mit projektiver Geometrie in Berührung gekommen zu sein. Zugegeben, ihr „goldenes Zeitalter" ging vor über hundert Jahren zu Ende. Aber eine Aussage wie etwa der *Satz von Pascal* kann auch heute niemanden, der Sinn für Mathematik hat, unbewegt lassen. Außerdem ist die projektive Geometrie eine der stärksten Wurzeln gewesen für die Entwicklung der algebraischen Geometrie, deren weitverzweigter Baum heute in vollem Saft steht.

Zusammen mit dem Band über Lineare Algebra kann dieses Buch als Begleittext zu einer der üblichen zweisemestrigen Anfängervorlesungen über „Lineare Algebra und Analytische Geometrie“ dienen. Die Trennung in zwei Bände eröffnet dem Leser mannigfache Möglichkeiten, nach eigenem Geschmack das Studium der linearen Algebra durch geometrische Exkurse aufzulockern. Dabei wird man sich aus Zeitgründen auf eine Auswahl aus der analytischen Geometrie beschränken müssen. Um dies zu erleichtern, sind die drei Kapitel weitgehend unabhängig voneinander gehalten.

Das zweite Kapitel ist ganz unabhängig, es benötigt keine Hilfsmittel aus den beiden anderen. Die Zusammenhänge zwischen affiner und projektiver Geometrie zu unterdrücken, wäre jedoch widersinnig gewesen. An zwei schwierigen Stellen in der affinen Geometrie setzen wir Ergebnisse der projektiven Geometrie ein: Beim Beweis des Hauptsatzes über Kollineationen (1.3.4) und bei der Klassifikation von Quadriken (1.4.5 bis 1.4.8). Die restlichen Abschnitte der affinen Geometrie hängen jedoch davon nicht ab. Schließlich sollte man als Motivation für die projektive Geometrie ein klein wenig affine Geometrie kennengelernt haben.

Ob man sich mit der Einführung allgemeiner affiner Räume abgeben will oder nicht, ist eine Frage des Geschmacks. Vom handwerklichen Standpunkt kann man sich damit begnügen, Geometrie in einem Vektorraum zu betreiben. Einer der Gründe, warum der allgemeine Begriff hier doch ausführlich dargestellt wurde, war der, einen zukünftigen Lehrer für den Fall zu wappnen, daß er diesen Dingen einmal in Schulbüchern begegnet.

Zahlreiche Probleme von unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad sollen dem Leser als Anregung für selbständige Arbeit dienen: Die meisten davon sind einfache *Übungsaufgaben.* Einige erfordern mehr Anstrengung, sie sind als *Aufgaben* gekennzeichnet.

An Quellen, aus denen ich analytische Geometrie gelernt habe, möchte ich besonders die Vorlesungen meines verehrten Lehrers *G. Nöbeling,* sowie die Vorlesungsausarbeitung von *H. Hermes* [3] erwähnen. Die Grundlagen der linearen Optimierung habe ich erstmals durch die Bücher von *S. Guber* [2] und *W. Nef* [6] kennengelernt.

Viele Kollegen sind mir mit guten Ratschlägen beigestanden, in erster Linie die Herren *O. Forster* und *R. Sacher.* Beim Korrekturlesen haben mir Frau *C. Horst*, sowie die Herren *V. Aurich* und *G. Baumann* geholfen. Schließlich danke ich dem Vieweg Verlag für die stets angenehme Zusammenarbeit.

München, im November 1977 *Gerd Fischer*

In der vorliegenden Neuauflage wurden wieder einige Kleinigkeiten berichtigt. Mein Dank gilt den kritischen Lesern für ihre wertvollen Hinweise.

Davis, im Dezember 1991 *Gerd Fischer*