

**vieweg studium**

# Grundkurs Mathematik

Diese Reihe wendet sich an den Studenten der mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Fächer. Ihm – und auch dem Schüler der Sekundarstufe II – soll die Vorbereitung auf Vorlesungen und Prüfungen erleichtert und gleichzeitig ein Einblick in die Nachbarfächer geboten werden. Die Reihe wendet sich aber auch an den Mathematiker, Naturwissenschaftler und Ingenieur in der Praxis und an die Lehrer dieser Fächer.

Zu der Reihe gehören folgende Abteilungen:

Basiswissen, Grundkurs und Aufbaukurs  
Mathematik, Physik, Chemie, Biologie

Gerd Fischer

# Analytische Geometrie

6., überarbeitete Auflage

Mit 129 Abbildungen



Dr. rer. nat. Gerd Fischer ist ord. Professor  
am Mathematischen Institut der Universität Düsseldorf  
Anschrift: Universitätsstr. 1, 4 Düsseldorf 1

(Eine Kurzbiographie des Autors steht auf Seite 211)

Die Reproduktion von Abbildungen aus Albrecht Dürer,  
Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit,  
mit freundlicher Genehmigung des  
Germanischen Nationalmuseums, Nürnberg

- 1.– 5. Tausend März 1978
- 6.–10. Tausend März 1979
- 11.–13. Tausend Mai 1983
- 14.–16. Tausend Oktober 1985
- 17.–19. Tausend September 1988
- 20.–22. Tausend Februar 1991
- 23.–25. Tausend März 1992

Alle Rechte vorbehalten

© Springer Fachmedien Wiesbaden 1992

Ursprünglich erschienen bei Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH,  
Braunschweig/Wiesbaden, 1992



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt:  
Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechts-  
gesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das  
gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikrover-  
filmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen  
Systemen.

Satz: Vieweg, Braunschweig  
Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN 978-3-528-57235-8      ISBN 978-3-322-94382-8 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-322-94382-8

# Inhaltsverzeichnis

## 1. Affine Geometrie

### 1.0. Allgemeine affine Räume

1.0.1. Parallelverschiebungen	1
1.0.2. Affine Unterräume von Vektorräumen	1
1.0.3. Gruppenhomomorphismen und Untergruppen	2
1.0.4. Operationen von Gruppen	3
1.0.5. Affine Räume	4
1.0.6. Vektorräume und affine Räume	5
1.0.7. Parallelogramme, freie Vektoren, Ortsvektoren	5
1.0.8. Synthetische Einführung affiner Räume	6

### 1.1. Affine Abbildungen und Unterräume

1.1.0. Affine Abbildungen von Vektorräumen	7
1.1.1. Affine Abbildungen affiner Räume	8
1.1.2. Einfache Eigenschaften affiner Abbildungen	9
1.1.3. Charakterisierung von Translationen	11
1.1.4. Affine Unterräume	11
1.1.5. Jeder affine Unterraum ist ein affiner Raum	12
1.1.6. Durchschnitt und Verbindung affiner Räume	12
1.1.7. Geometrische Charakterisierung affiner Unterräume	13
1.1.8. Der Translationsraum des Verbindungsraumes	15
1.1.9. Geometrische Charakterisierung des Verbindungsraumes	16
1.1.10. Dimensionsformel	17
1.1.11. Projektionen in Vektorräumen	18
1.1.12. Parallele Unterräume, Parallelprojektionen	19

### 1.2. Affine Koordinaten

1.2.1. Affin unabhängige Punkte, affine Basen	21
1.2.2. Affine Basen und affine Abbildungen	22
1.2.3. Affine Koordinatensysteme	23
1.2.4. Das Teilverhältnis	23
1.2.5. Drei Sätze der Elementargeometrie	25
1.2.6. Parameterdarstellungen, Affinkombinationen	26
1.2.7. Parameterdarstellung des Durchschnitts	28
1.2.8. Beschreibung affiner Abbildungen durch Matrizen	29
1.2.9. Fixpunkte	30
1.2.10. Dilatationen	31

1.3. Kollineationen	
1.3.1. Affinitäten und Kollineationen	31
1.3.2. Körperautomorphismen	32
1.3.3. Semiaffinitäten	33
1.3.4. Der Hauptsatz der affinen Geometrie	35
1.4. Quadriken	
1.4.0. Ellipse, Hyperbel und Parabel	36
1.4.1. Definition von Quadriken	53
1.4.2. Beispiel einer Hauptachsentransformation	56
1.4.3. Satz über die Hauptachsentransformation	57
1.4.4. Rechenverfahren für die Hauptachsentransformation	61
1.4.5. Geometrische Äquivalenz und projektiver Abschluß	64
1.4.6. Topologischer Abschluß	65
1.4.7. Geometrischer Klassifikationssatz	70
1.4.8. Normalformen	72
1.5. Euklidische affine Räume	
1.5.1. Definitionen und Beispiele	74
1.5.2. Isometrien	75
1.5.3. Kongruenzen	76
1.5.4. Eulersche Winkel	77
1.5.5. Ähnlichkeiten	79
1.5.6. Geometrische Charakterisierung von Ähnlichkeiten	80
1.5.7. Hauptachsentransformation von Affinitäten	81
1.5.8. Geometrische Hauptachsenkonstruktion	82
1.5.9. Metrische Hauptachsentransformation von Quadriken	85
1.5.10. Beispiele zur Hauptachsentransformation	89
<b>2. Konvexe Mengen und lineare Optimierung</b>	
2.0. Problemstellung	
2.0.1. Ein Beispiel	92
2.0.2. Formulierung der allgemeinen Aufgabe	94
2.1. Konvexe Mengen und ihre Extrempunkte	
2.1.1. Strecken, konvexe Mengen, Halbräume	95
2.1.2. Konvexe Hüllen und Konvexkombinationen	96
2.1.3. Simplex und Polyeder	97
2.1.4. Extrempunkte und Ecken	98
2.1.5. Existenz optimaler Extrempunkte	99
2.1.6. Berechnung der Extrempunkte	100
2.1.7. Vorläufige Lösung der Optimierungsaufgabe	102

## 2.2. Das Simplexverfahren

2.2.1. Ein Trennungsslemma	103
2.2.2. Polyeder und Lösungen von Ungleichungssystemen	104
2.2.3. Ein Satz von Minkowski	105
2.2.4. Kanten von Polyedern	106
2.2.5. Das Austauschlemma	107
2.2.6. Das Eckentableau	109
2.2.7. Charakterisierung optimaler Ecken	110
2.2.8. Einfache und mehrfache Ecken	111
2.2.9. Übergang zu einer benachbarten Ecke	112
2.2.10. Pivotsuche mit Hilfe charakteristischer Quotienten	114
2.2.11. Rechenverfahren für den Übergang	115
2.2.12. Lösung der Optimierungsaufgabe	117
2.2.13. Ein Beispiel	119

## 2.3. Ausnahmefälle

2.3.1. Nicht kompakte Lösungsmenge	121
2.3.2. Mehrere optimale Ecken	122
2.3.3. Mehrfache Ecken	122
2.3.4. Pivotsuche bei mehrfachen Ecken	123
2.3.5. Stationärer Austausch	124
2.3.6. Konvexe Optimierung	125

## 3. Projektive Geometrie

### 3.0. Vorbemerkungen

#### 3.1. Projektive Räume und Unterräume

3.1.1. Projektive Räume	131
3.1.2. Homogene Koordinaten	131
3.1.3. Projektive Unterräume	132
3.1.4. Unendlich ferne Hyperebene	132
3.1.5. Durchschnitt und Verbindung	134

#### 3.2. Projektive Abbildungen und Koordinaten

3.2.1. Projektive Abbildungen	135
3.2.2. Projektive Räume und affine Räume	137
3.2.3. Abschluß affiner Räume	141
3.2.4. Projektiv unabhängige Punkte, projektive Basen	141
3.2.5. Projektivitäten mit vorgeschriebenen Werten	143
3.2.6. Projektive Koordinaten	144
3.2.7. Beschreibung von Projektivitäten durch Matrizen	144
3.2.8. Beschreibung von projektiven Unterräumen durch Gleichungen	146
3.2.9. Zentralprojektionen und Perspektivitäten	147

3.3. Invarianten von Projektivitäten	
3.3.1. Doppelverhältnis	149
3.3.2. Berechnung des Doppelverhältnisses	151
3.3.3. Doppelverhältnis bei Permutation der Punkte	153
3.3.4. Doppelverhältnis und Teilverhältnis	154
3.3.5. Harmonische Punktpaare	154
3.3.6. Vollständige Vierseite	155
3.3.7. Die Sätze von Desargues und Pappos	156
3.3.8. Kollineationen und Semiprojektivitäten	158
3.3.9. Der Hauptsatz der projektiven Geometrie	158
3.3.10. Beweis des Hauptsatzes der affinen Geometrie	165
3.4. Dualität	
3.4.1. Pol und Polare beim Kreis	166
3.4.2. Korrelationen	168
3.4.3. Dualer projektiver Raum	169
3.4.4. Der Hauptsatz über Korrelationen	170
3.4.5. Korrelationen und Sesquilinearformen	170
3.4.6. Hyperebenenkoordinaten	171
3.4.7. Das Dualitätsprinzip	172
3.4.8. Hyperebenenbüschel	174
3.5. Quadriken	
3.5.1. Homogene Polynome, Kegel, Quadriken	176
3.5.2. Die Schnitte eines Kreiskegels	178
3.5.3. Quadriken und Bilinearformen	180
3.5.4. Projektive Bilder von Quadriken	181
3.5.5. Projektive Hauptachsentransformation	183
3.5.6. Rechenverfahren für die Hauptachsentransformation	185
3.5.7. Bestimmung der Hauptachsenform	188
3.5.8. Verschiedene Gleichungen für eine Quadrik	190
3.5.9. Geometrische Klassifikation	192
3.5.10. Normalformen	195
3.5.11. Tangenten und Tagentialhyperebenen	198
3.5.12. Der Satz von Pascal	199
Anhang. Das Erlanger Programm von Felix Klein	205
Literaturhinweise	207
Sachregister	209
Namensregister	211
Symbolverzeichnis	212

### Der euklidische Raum

Was mach ich armer Teufel bloß?  
 Nun bin ich alt und arbeitslos.  
 Ich diene viele hundert Jahr  
 ergeben, redlich, treu und wahr,  
 mit Umsicht, Tatkraft und Geschick  
 im hohen Hause der Physik.  
 Verdiente meinen guten Lohn.  
 Doch plötzlich war das alles aus.  
 Ein neuer Herr bezog das Haus.  
 Der sprach: „Ich geb Ihnen hiermit zu wissen:  
 Sie lassen leider ganz vermissen

die unumgängliche Präzision.  
 Die angenäherte Schlampigkeit,  
 die geht mir, das muß ich schon sagen, zu weit.  
 Sie können mir daher nicht weiter dienen,  
 und kurz und gut, ich kündige Ihnen  
 hiermit zum Ersten des folgenden Jahres.“  
 Ich war ganz sprachlos, doch so war es.  
 Und finden Sie mich morgens mal  
 erhängt an einem Integral –  
 ach, reden hat ja keinen Zweck!  
 So ging der Raum betrübt hinweg.

aus Hubert Cremer [34]

## Vorwort

Dieses Buch schließt an die „Lineare Algebra“ (vieweg studium Band 17, stets zitiert als „L.A.“) an. Es ist entstanden aus Vorlesungen für Studenten der Mathematik ab dem zweiten Semester. Ihnen sollte ein Eindruck vermittelt werden, wie sich der Formalismus der linearen Algebra anwenden läßt.

Im Vordergrund steht dabei die sogenannte „Analytische Geometrie“. Nach dem heute üblichen Sprachgebrauch versteht man darunter den Teil der Geometrie, der mit Hilfsmitteln der linearen Algebra betrieben wird. Verwendung von höherer Algebra führt zur „algebraischen Geometrie“, in der „Differentialgeometrie“ werden geometrische Gebilde vom Standpunkt der Analysis untersucht. (Es sei bemerkt, daß solche Unterscheidungen, verbunden mit dem Streben nach „Reinheit der Methoden“, der Geometrie insgesamt mehr geschadet als genützt haben.)

Im ersten Kapitel werden affine Räume eingeführt und einfache Eigenschaften von affinen Unterräumen und Quadriken hergeleitet. Mit Hilfsmitteln der linearen Algebra kann man auch Systeme linearer Ungleichungen untersuchen. Damit beschäftigt sich das zweite Kapitel über „lineare Optimierung“. Hier wird besonderer Wert darauf gelegt, die geometrischen Hintergründe zu erläutern. Im dritten Kapitel wird schließlich versucht, den Leser davon zu überzeugen, daß ein tieferer Einblick in geometrische Zusammenhänge erst vom projektiven Standpunkt aus möglich wird.

Etwa so, wie es in gebildeten Kreisen gerne als ein Zeichen für Leute von Welt angesehen wird, nichts von Mathematik zu verstehen, ist mancher Mathematiker stolz darauf, nie mit projektiver Geometrie in Berührung gekommen zu sein. Zugegeben, ihr „goldenes Zeitalter“ ging vor über hundert Jahren zu Ende. Aber eine Aussage wie etwa der *Satz von Pascal* kann auch heute niemanden, der Sinn für Mathematik hat, unbewegt lassen. Außerdem ist die projektive Geometrie eine der stärksten Wurzeln gewesen für die Entwicklung der algebraischen Geometrie, deren weitverzweigter Baum heute in vollem Saft steht.



Zusammen mit dem Band über Lineare Algebra kann dieses Buch als Begleittext zu einer der üblichen zweisemestrigen Anfängervorlesungen über „Lineare Algebra und Analytische Geometrie“ dienen. Die Trennung in zwei Bände eröffnet dem Leser mannigfache Möglichkeiten, nach eigenem Geschmack das Studium der linearen Algebra durch geometrische Exkurse aufzulockern. Dabei wird man sich aus Zeitgründen auf eine Auswahl aus der analytischen Geometrie beschränken müssen. Um dies zu erleichtern, sind die drei Kapitel weitgehend unabhängig voneinander gehalten.

Das zweite Kapitel ist ganz unabhängig, es benötigt keine Hilfsmittel aus den beiden anderen. Die Zusammenhänge zwischen affiner und projektiver Geometrie zu unterdrücken, wäre jedoch widersinnig gewesen. An zwei schwierigen Stellen in der affinen Geometrie setzen wir Ergebnisse der projektiven Geometrie ein: Beim Beweis des Hauptsatzes über Kollineationen (1.3.4) und bei der Klassifikation von Quadriken (1.4.5 bis 1.4.8). Die restlichen Abschnitte der affinen Geometrie hängen jedoch davon nicht ab. Schließlich sollte man als Motivation für die projektive Geometrie ein klein wenig affine Geometrie kennengelernt haben.

Ob man sich mit der Einführung allgemeiner affiner Räume abgeben will oder nicht, ist eine Frage des Geschmacks. Vom handwerklichen Standpunkt kann man sich damit begnügen, Geometrie in einem Vektorraum zu betreiben. Einer der Gründe, warum der allgemeine Begriff hier doch ausführlich dargestellt wurde, war der, einen zukünftigen Lehrer für den Fall zu wappnen, daß er diesen Dingen einmal in Schulbüchern begegnet.

Zahlreiche Probleme von unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad sollen dem Leser als Anregung für selbständige Arbeit dienen: Die meisten davon sind einfache *Übungsaufgaben*. Einige erfordern mehr Anstrengung, sie sind als *Aufgaben* gekennzeichnet.

An Quellen, aus denen ich analytische Geometrie gelernt habe, möchte ich besonders die Vorlesungen meines verehrten Lehrers *G. Nöbeling*, sowie die Vorlesungsausarbeitung von *H. Hermes* [3] erwähnen. Die Grundlagen der linearen Optimierung habe ich erstmals durch die Bücher von *S. Guber* [2] und *W. Nef* [6] kennengelernt.

Viele Kollegen sind mir mit guten Ratschlägen beigestanden, in erster Linie die Herren *O. Forster* und *R. Sacher*. Beim Korrekturlesen haben mir Frau *C. Horst*, sowie die Herren *V. Aurich* und *G. Baumann* geholfen. Schließlich danke ich dem Vieweg Verlag für die stets angenehme Zusammenarbeit.

München, im November 1977

*Gerd Fischer*

In der vorliegenden Neuauflage wurden wieder einige Kleinigkeiten berichtigt. Mein Dank gilt den kritischen Lesern für ihre wertvollen Hinweise.

Davis, im Dezember 1991

*Gerd Fischer*