

Karl-Heinz Pfeffer

**Analysis  
für Fachoberschulen**

**INTERNET-SERVICE**

Mehr Informationen  
mit dem

# **VIEWEG INTERNET-SERVICE**

Das vollständige Angebot an  
Studienbüchern, Infos über  
Vertrieb, Lektorat und  
Neue Medien finden Sie

unter

***<http://www.vieweg.de>***



Karl-Heinz Pfeffer

# **Analysis für Fachoberschulen**

**Ein Lehr- und Arbeitsbuch zur modernen Mathematik**

Mit 220 Bildern und mehr als 2000 Aufgaben

4., verbesserte und erweiterte Auflage



Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

**Pfeffer, Karl-Heinz:**

Analysis für Fachoberschulen: ein Lehr- und Arbeitsbuch  
zur modernen Mathematik / Karl-Heinz Pfeffer. –

Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg  
(Viewegs Fachbücher der Technik)

[Hauptbd.]. – 4., verb. und erw. Aufl. – 1998

ISBN 978-3-528-34006-3

ISBN 978-3-322-94274-6 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-94274-6

1. Auflage 1981  
1 Nachdruck
- 2., durchgesehene Auflage 1985  
1 Nachdruck
- 3., verbesserte Auflage 1988  
3 Nachdrucke
- 4., verbesserte und erweiterte Auflage 1998

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1998

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Bertelsmann Fachinformation GmbH.



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

<http://www.vieweg.de>

Umschlaggestaltung: Klaus Birk, Wiesbaden

Satz: Kníhtlačiareň Svornosí G.m.b.H., Bratislava

Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN 978-3-528-34006-3

# Vorwort

Das vorliegende Unterrichtswerk zur *Analysis* ist ein Lehr- und Arbeitsbuch für Fachoberschulen der Klassen 12.

Es berücksichtigt in besonderem Maße die unterschiedlichen mathematischen Vorkenntnisse der Fachoberschüler, indem wiederholende Inhalte angeboten werden, die je nach Bedarf mehr oder weniger selbständig von Schülerinnen und Schülern erarbeitet werden können. Aus diesem Grunde kann das Buch ebenso gut bereits in den 11. Klassen eingeführt werden und bietet sich darüberhinaus für jene Absolventen der Erwachsenenbildung an (Volkshochschulen etc.), welche die Fachhochschulreife erwerben möchten.

*Analysis für Fachoberschulen* entstammt der langjährigen Unterrichtspraxis des Verfassers an einer Fachoberschule Technik. Die entsprechende Orientierung am technischen und physikalischen Erfahrungs- bzw. Erlebnisbereich der Lernenden ist dabei so erfolgt, daß eine Verwendung in den anderen Fachrichtungen (insbesondere Seefahrt und Agrarwirtschaft) ebenfalls gut möglich ist.

Wegen der spezifisch technischen Akzentuierung eröffnet sich auch ein Unterrichtseinsatz in einschlägigen Berufsoberschulen sowie in Fachgymnasien Technik.

Der didaktische Leitgedanke dieses Buches beinhaltet, *grundlegende* Kenntnisse über Funktionen zu vermitteln, ohne dabei die Theorie überzubewerten. Dazu gehört es, hinführend zu den klassischen Methoden der Analysis auch die hierfür wesentlichen elementaren Rechentechniken und geometrischen Denkweisen bereitzustellen und einzuüben.

Das geschieht zunächst einmal durch bewußt breit angelegte Überlegungen zu den linearen und quadratischen Funktionen, an die sich die einschlägigen Nullstellenermittlungen ganzzahliger Funktionen höheren Grades anschließen. Abgerundet wird die elementare Funktionenlehre durch wiederholende Betrachtung der trigonometrischen Grundfunktionen und mündet ein in die Erarbeitung der allgemeinen Sinusfunktion.

Dieser Einstieg in die Analysis, je nach Lerngruppe und Lernintention abkürzbar, hat den Vorteil, daß nach der sich anschließenden Erarbeitung des Grenzwertbegriffes über Folgen bzw. über Funktionen den Lernenden die Problemstellungen der Differential- und später auch der Integralrechnung durchsichtiger erscheinen: Grundsätzliche Vorgehensweisen werden wieder aufgegriffen (Wiederholungseffekt!) und gemäß Spiralprinzips in erweitertem Zusammenhang angewandt.

Besonders erwähnenswert ist, daß die Integralrechnung anschaulich über Flächeninhaltsfunktionen eingeführt wird.

Viele Beispielaufgaben mit Lösungen (►) erleichtern das selbständige Einüben des Stoffes. Das umfangreiche, zum großen Teil anwendungsbezogene Aufgabenmaterial ermöglicht handlungsorientierte Unterrichtsansätze, schülerorientierte Übungsphasen und intensive Vorbereitung auf Lernkontrollen. Die Aufgabenanordnung ist innerhalb derselben Thematik, soweit möglich, im Sinne einer methodischen Reihe schwierigkeitsgraddifferenziert erfolgt; besonders schwierige Aufgaben sind *kursiv* gekennzeichnet.

Die mit \* versehenen Inhalte dienen der Abrundung. Sie können ohne Einfluß auf das weitere Vorgehen auch weggelassen werden bzw. ermöglichen den Einsatz des Unterrichtswerkes über den vom Titel her genannten Adressatenkreis hinaus.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Mathematische Zeichen und Begriffe</b> . . . . .	<b>X</b>
---	----------

## Analysis

<b>1 Die reellen Zahlen</b> . . . . .	<b>2</b>
1.1 Die Grundeigenschaften der reellen Zahlen . . . . .	2
1.1.1 Von den natürlichen zu den reellen Zahlen . . . . .	2
Die natürlichen Zahlen . . . . .	2
Ganze Zahlen . . . . .	3
Rationale Zahlen . . . . .	4
Irrationale Zahlen . . . . .	7
Reelle Zahlen . . . . .	9
1.1.2 Lagebeziehungen reeller Zahlen . . . . .	14
Intervall, Umgebung, absoluter Betrag	
1.2 Das Rechnen in $\mathbb{R}$ . . . . .	17
1.2.1 Der binomische Satz . . . . .	18
1.2.2 Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	23
Grundlagenwiederholung . . . . .	23
Lineare Ungleichungen . . . . .	27
Quadratische Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	31
Exponentialgleichungen . . . . .	37
<b>2 Funktionenlehre</b> . . . . .	<b>41</b>
2.1 Grundlagen . . . . .	41
2.1.1 Paarmengen . . . . .	41
2.1.2 Funktionen . . . . .	44
Funktionen als Spezialfall von Relationen . . . . .	44
Definitions- und Wertemenge . . . . .	45
Schreibweise von Funktionen . . . . .	45
2.2 Ausgewählte elementare Funktionen . . . . .	50
2.2.1 Lineare Funktionen . . . . .	50
Die Gerade als Graph linearer Funktionen . . . . .	50
*Anwendung linearer Funktionen . . . . .	56
Nullstellen linearer Funktionen . . . . .	59
Schnittpunkt zweier Geraden . . . . .	60
Schnittwinkel zweier Geraden – Orthogonalität . . . . .	63
Erstellung linearer Funktionen . . . . .	67
*Länge einer Strecke . . . . .	73
*Mitte einer Strecke . . . . .	74

2.2.2	Quadratische Funktionen . . . . .	76
	Die Normalparabel . . . . .	76
	Allgemeine Form der Scheitelgleichung . . . . .	80
	Nullstellen quadratischer Funktionen . . . . .	84
	Schnittpunkte Gerade – Parabel . . . . .	88
	Schnittpunkte Parabel – Parabel . . . . .	91
	Erstellung quadratischer Funktionen . . . . .	92
*2.2.3	Lineare und quadratische Betragsfunktionen . . . . .	95
2.2.4	Umkehrfunktionen (Umkehrrelationen) . . . . .	97
2.2.5	Ganzrationale Funktionen . . . . .	104
	Reine Potenzfunktionen . . . . .	104
	Nullstellen ganzrationaler Funktionen . . . . .	108
	Kurvenverlauf und Symmetrie . . . . .	115
	*Das Horner-schema . . . . .	119
2.3	Trigonometrische Funktionen (Kreisfunktionen) . . . . .	123
2.3.1	Die Eigenschaften der trigonometrischen Grundfunktionen . . . . .	124
	Das Bogenmaß eines Winkels . . . . .	124
	Die Sinus- und Kosinusfunktion . . . . .	125
	Die Tangens- und Kotangensfunktion . . . . .	130
2.3.2	Die allgemeine Sinusfunktion . . . . .	133
<b>3</b>	<b>Folgen und Reihen . . . . .</b>	<b>138</b>
3.1	Grundlagen . . . . .	138
3.1.1	Folge als Funktion . . . . .	138
3.1.2	Schreibweise von Folgen . . . . .	140
3.1.3	Eigenschaften von Folgen . . . . .	142
3.1.4	Reihen . . . . .	145
3.2	Spezielle (endliche) Folgen . . . . .	147
3.2.1	Arithmetische Folgen und Reihen . . . . .	147
	Das Bildungsgesetz . . . . .	147
	Arithmetische Folgen als lineare Funktionen . . . . .	149
	Die Summenformel der arithmetischen Reihe . . . . .	150
	*Vollständige Induktion . . . . .	152
3.2.2	Geometrische Folgen und Reihen . . . . .	155
	Das Bildungsgesetz . . . . .	155
	*Geometrische Folgen als Exponentialfunktionen . . . . .	159
	Die Summenformel der geometrischen Reihe . . . . .	162
*3.2.3	Zinseszinsrechnung . . . . .	166
3.3	Grenzwert von Folgen . . . . .	168
3.3.1	Unendliche geometrische Folgen und Reihen . . . . .	168
	*Periodische Dezimalzahlen als Grenzwert unendlicher geometrischer Reihen . . . . .	173
3.3.2	Verallgemeinerung des Grenzwertbegriffes . . . . .	177
	Konvergenz ausgewählter nicht-geometrischer Folgen . . . . .	177
	Definition des Grenzwertes und 1. Konvergenzkriterium . . . . .	180

3.3.3	Das Rechnen mit Grenzwerten . . . . .	181
	Grenzwertsätze . . . . .	181
	Grenzwert von Quotientenfolgen . . . . .	182
*3.4	Wachstum und Zerfall . . . . .	183
3.4.1	Euler'sche Zahl und e-Funktion . . . . .	183
3.4.2	Spezielle Anwendungsformen der e-Funktion . . . . .	187
<b>4</b>	<b>Grenzwert von Funktionen – Stetigkeit . . . . .</b>	<b>191</b>
4.1	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	191
4.1.1	Erfordernis diverser Grenzwertbetrachtungen . . . . .	191
4.1.2	Rechnerischer Umgang mit Grenzwerten . . . . .	194
*4.1.3	Anwendung auf Kurvenuntersuchungen einfacher gebrochen-rationaler Funktionen . . . . .	202
4.2	Stetigkeit . . . . .	211
4.2.1	Begriff der Stetigkeit . . . . .	211
4.2.2	Globale Stetigkeit . . . . .	215
<b>5</b>	<b>Differentialrechnung . . . . .</b>	<b>216</b>
5.1	Das Tangentenproblem . . . . .	216
5.1.1	Die Differenzenquotientenfunktion . . . . .	216
5.1.2	Allgemeine Definition des Differentialquotienten . . . . .	219
5.1.3	Einfache Differentiationsregeln . . . . .	221
	Potenz-, Konstanten-, Summenregel	
*5.1.4	Differenzierbarkeit und Stetigkeit . . . . .	229
*5.1.5	Anwendung in der Physik . . . . .	231
5.2	Anwendung auf Kurvenuntersuchungen . . . . .	234
5.2.1	Extremstellen von Funktionen – Krümmungsverhalten . . . . .	235
5.2.2	Wendepunkte . . . . .	239
5.2.3	Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen . . . . .	243
5.3	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen . . . . .	251
<b>6</b>	<b>Integralrechnung . . . . .</b>	<b>260</b>
6.1	Das bestimmte Integral . . . . .	260
6.1.1	Das Flächenproblem . . . . .	260
	Vorbemerkungen . . . . .	260
	Flächeninhaltsfunktion . . . . .	262
	Das bestimmte Integral als Operator . . . . .	268
	Das bestimmte Integral für $f(x) < 0$ . . . . .	270
6.1.2	Die Berechnung des bestimmten Integrals ganzrationaler Funktionen . . . . .	272
	Integrierbarkeit . . . . .	272
	Integrationsregeln . . . . .	273
	Fläche zwischen Funktionsgraph und $x$ -Achse . . . . .	277
	Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen . . . . .	280
	Rotationsvolumen . . . . .	284



---

*6.2	Die Integration als Umkehrung der Differentiation . . . . .	285
6.2.1	Das bestimmte Integral als Funktion seiner oberen Grenze . . .	285
6.2.2	Stammfunktion und unbestimmtes Integral . . . . .	289
6.2.3	Die Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen . . . . .	294
<b>*7</b>	<b>Vertiefung der Differentialrechnung</b> . . . . .	297
7.1	Weitere Differentiationsregeln . . . . .	297
7.1.1	Produktregel . . . . .	297
7.1.2	Quotientenregel . . . . .	298
7.1.3	Kettenregel . . . . .	300
7.2	Kurvendiskussion gebrochen-rationaler Funktionen . . . . .	304
7.3	Kurvendiskussion trigonometrischer Funktionen . . . . .	313
7.3.1	Die Differentiation der trigonometrischen Grundfunktionen . . .	313
	Die Ableitungen des Sinus und Kosinus . . . . .	315
	Die Ableitungen des Tangens und Kotangens . . . . .	317
7.3.2	Zusammengesetzte trigonometrische Funktionen . . . . .	318
	<b>Sachwortverzeichnis</b> . . . . .	322

# Mathematische Zeichen und Begriffe

## 1 Logik

$:=$	<i>definitionsgemäß gleich</i> ; Kennzeichnung einer Definitionsgleichung, bei welcher der zu definierende Begriff auf der Seite des Doppelpunktes steht.
$\wedge$	<i>und</i> (im Sinne von sowohl ... als auch)
$\vee$	<i>oder</i> (im nicht-ausschließenden Sinn)
$\Rightarrow$	<i>daraus folgt</i> ; wenn ..., dann ( $p \Rightarrow q$ : Aus $p$ folgt $q$ , d. h. $p$ ist hinreichende Bedingung für $q$ und $q$ ist notwendige Bedingung für $p$ .)
$\Leftrightarrow$	<i>äquivalent</i> (gleichwertig); genau dann ..., wenn ( $p \Leftrightarrow q$ : Aus $p$ folgt $q$ und umgekehrt)

## 2 Relationen zwischen Zahlen

$a = b$	$a$ gleich $b$	$a \neq b$	$a$ ungleich $b$
$a < b$	$a$ kleiner $b$	$a > b$	$a$ größer $b$
$a \leq b$	$a$ kleiner oder gleich $b$	$a \geq b$	$a$ größer oder gleich $b$
$a \approx b$	$a$ ungefähr gleich $b$		
$a \triangleq b$	$a$ entspricht $b$ (gebräuchlich z.B. bei Maßstabsangaben)		

## 3 Mengen

$A, B, C, \dots, M, N, \dots$	Mengen
$a \in M (M \ni a)$	$a$ ist Element von $M$ ( $M$ enthält $a$ )
$a \notin M$	$a$ ist nicht Element von $M$
$\{a, b, c, d\}$	Menge mit den Elementen $a, b, c$ und $d$
$\{x \dots\}$	Menge aller $x$ , für die gilt ...
$\{x \dots\}_M$	Menge aller $x \in M$ , für die gilt ...
$\{\}$	leere Menge
$A = B$	$A$ gleich $B$ , d.h. $x \in A \Leftrightarrow x \in B$
$A \subset B (B \supset A)$	$A$ ist (echte) Teilmenge von $B$ , d.h. $x \in A \Rightarrow x \in B$ und $A \neq B$ ( $B$ ist (echte) Obermenge von $A$ )
$A \subseteq B$	$A$ ist echte oder unechte Teilmenge von $B$ (d.h. $A \subset B$ oder $A = B$ )

$A \not\subseteq B$	$A$ ist nicht Teilmenge von $B$
$A \cap B := \{x   x \in A \wedge x \in B\}$	$A$ geschnitten $B$ ; Schnittmenge (Durchschnitt) von $A$ und $B$
$A \cup B := \{x   x \in A \vee x \in B\}$	$A$ vereinigt $B$ ; Vereinigungsmenge von $A$ und $B$
$B \setminus A := \{x   x \in B \wedge x \notin A\}$	$B$ ohne $A$ ; Differenzmenge von $B$ und $A$
$A'_B := \{x   x \notin A\}_B$ für $A \subseteq B$	Ergänzungsmenge von $A$ zu $B$ , d.h. $A \cup A'_B = B$
$A \times B := \{(x; y)   x \in A \wedge y \in B\}$	$A$ kreuz $B$ ; Paarmenge von $A$ und $B$ (kartesisches Produkt)

**charakteristische Mengen**

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$	Menge der natürlichen Zahlen einschl. 0
$\mathbb{Z} := \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{J} := \{x   x \notin \mathbb{Q}\}_{\mathbb{R}}$	Menge der irrationalen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	Menge der positiven reellen Zahlen einschl. 0
$\mathbb{R}^- := \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_0^+$	Menge der negativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$	Menge der reellen Zahlen ohne 0
$[a; b] := \{x   a \leq x \leq b\}_{\mathbb{R}}$	geschlossenes Intervall
$]a; b[ := \{x   a < x < b\}_{\mathbb{R}}$	offenes Intervall
$[a; b[ := \{x   a \leq x < b\}_{\mathbb{R}}$	halboffene Intervalle
$]a; b] := \{x   a < x \leq b\}_{\mathbb{R}}$	
$ x  := \begin{cases} +x & \text{für } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ -x & \text{für } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$	Betrag einer (reellen) Zahl $x$

**4 Funktionen**

$\rightarrow$	Zahlen- und Mengenzuordnungspfeil
$R$	Relation als Teilmenge eines kartesischen Produkts
$f$ (auch $g$ oder $h$ )	Funktion als Spezialfall einer Relation
$f: x \rightarrow f(x)$	Funktionsvorschrift
$f(x)$	Funktionswert (Bild von $x$ ); aber auch Funktionsterm
$y = f(x)$	Funktionsgleichung
$f: \begin{cases} D \rightarrow W \\ x \rightarrow f(x) \end{cases}$	Funktion $f$ mit Definitionsmenge $D$ und Wertmenge $W$

$f^{-1}(R^{-1})$	Umkehrfunktion (Umkehrrelation)
$G_f \ni P$	Graph von $f$ (Punktmenge) mit dem Punkt $P(x/y)$
$\equiv$	Identitätszeichen („ist identisch gleich“); z.B. Parabel $P \equiv y = x^2$
$(a_n)$	Folge mit den Gliedern $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ (Folge als Funktion mit $D \subseteq \mathbb{N}$ )
$f', f'', f''', \dots, f^{(n)}$	1., 2., 3., ..., $n$ -te Ableitungsfunktion von $f$
$f \circ g$ ( $g \circ f$ )	Verknüpfungszeichen für verkettete Funktionen ( $f$ nach $g$ bzw. $g$ nach $f$ )

**5 Weitere Zeichen**

$\infty$	unendlich
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	Grenzwert einer Folge für $n$ gegen $\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	Grenzwert einer Funktion $f$ für $x$ gegen $x_0$
$\sum_{k=1}^n a_k$	Summationssymbol: $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$
$\int_a^b f(x) dx$	bestimmtes Integral der Funktion $f$ über $[a; b]$
$\int f(x) dx$	unbestimmtes Integral der Funktion $f$
$F(x) = \int f(x) dx$	Stammfunktionen von $f$ mit $F'(x) = f(x)$ .

**6 Wichtige Begriffe**

<i>Definition</i>	Die Bedeutung eines verwendeten Namens oder Zeichens wird erklärt bzw. festgelegt.
<i>Axiom</i>	Anerkannter, nicht beweisbarer Grundsatz, aus dem sich <i>Sätze</i> ableiten lassen.
<i>Satz</i>	Unter Beachtung der Gesetze der Logik werden aus bereits bekannten Aussagen Schlußfolgerungen (Behauptungen) gezogen, die es zu beweisen gilt. – Zur Beweisführung darf auf eine entsprechende Definition zurückgegriffen werden.