

Numerische Mathematik

Von Dr. sc. math. Hans Rudolf Schwarz
o. Professor an der Universität Zürich

Mit einem Beitrag von Dr. sc. math. Jörg Waldvogel
Titularprofessor an der Eidg. Technischen Hochschule Zürich

3., überarbeitete und erweiterte Auflage
Mit 99 Figuren, 138 Beispielen und 106 Aufgaben



B. G. Teubner Stuttgart 1993

Prof. Dr. sc. math. Hans Rudolf Schwarz

Geboren 1930 in Zürich. Von 1949 bis 1953 Studium der Mathematik und Diplom an der ETH Zürich. Von 1953 bis 1957 Mathematiker bei den Flug- und Fahrzeugwerken Altenrhein (Schweiz). 1957 Promotion, ab 1957 wiss. Mitarbeiter an der ETH Zürich. 1962 Visiting Associate Professor an der Brown University in Providence, Rhode Island, USA. 1964 Habilitation an der ETH Zürich, von 1964 bis 1972 Lehrbeauftragter an der ETH Zürich. 1972 Assistenzprofessor, 1974 a. o. Professor, seit 1983 ord. Professor für angewandte Mathematik an der Universität Zürich.

Prof. Dr. sc. math. Jörg Waldvogel

Geboren 1938 in Zürich. Von 1957 bis 1963 Studium der Mathematik und Diplom an der ETH Zürich. Von 1962 bis 1967 Assistent und wiss. Mitarbeiter an der ETH Zürich; 1966 Promotion. Von 1967 bis 1970 Research Scientist bei Lockheed Missiles and Space Company, Huntsville, Alabama und part-time Assistant Professor an der University of Alabama at Huntsville. 1970 bis 1972 Assistant Professor an der University of Texas at Austin. Ab 1972 Leitung der Numerikgruppe am Seminar für Angewandte Mathematik der ETH und Lehrbeauftragter der ETH Zürich auf dem Gebiet der numerischen und angewandten Mathematik. 1980 Gastprofessor an der Université de Paris VI. 1985 Titularprofessor der ETH. 1986 Visiting Professor an der University of South Florida in Tampa.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Schwarz, Hans Rudolf:

Numerische Mathematik : mit 138 Beispielen und 106 Aufgaben

/ von Hans Rudolf Schwarz. Mit einem Beitr. von Jörg

Waldvogel. – 3., überarb. und erw. Aufl. – Stuttgart : Teubner,

1993

ISBN 978-3-519-22960-5

ISBN 978-3-322-94127-5 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-94127-5

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt besonders für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

© B. G. Teubner, Stuttgart 1993

Satz: Elsner & Behrens GmbH, Oftersheim

Umschlaggestaltung: M. Koch, Reutlingen

Vorwort

Das Buch entstand auf den seinerzeitigen ausdrücklichen Wunsch meines verehrten Lehrers, Herrn Prof. Dr. E. Stiefel, der mich im Sinne eines Vermächtnisses beauftragte, sein während vielen Jahren wegweisendes Standardwerk [Sti76] von Grund auf neu zu schreiben und den modernen Erkenntnissen und Bedürfnissen anzupassen. Klarheit und Ausführlichkeit waren stets die Hauptanliegen von Herrn Professor Stiefel. Ich habe versucht, in diesem einführenden Lehrbuch dieser von ihm geprägten Philosophie zu folgen, und so werden die grundlegenden Methoden der numerischen Mathematik in einer ausführlichen Darstellung behandelt.

Das Buch ist entstanden aus Vorlesungen, die der Unterzeichnete an der Universität Zürich gehalten hat. Der behandelte Stoff umfaßt im wesentlichen das Wissen, das der Verfasser seinen Studenten in einem viersemestrigen Vorlesungszyklus zu je vier Wochenstunden vermittelt. Sie sollen damit in die Lage versetzt werden, Aufgaben der angewandten Mathematik mit numerischen Methoden erfolgreich zu lösen oder zumindest die Grundlagen für das Studium von weiterführender, spezialisierter Literatur zu haben. Das Buch richtet sich an Mathematiker, Physiker, Ingenieure, Informatiker und Absolventen naturwissenschaftlicher Richtungen. Vorausgesetzt wird diejenige mathematische Vorbildung, die in den unteren Semestern eines Hochschulstudiums oder an Ingenieurschulen vermittelt wird.

Die Darstellung des Stoffes ist stark algorithmisch ausgerichtet, um der Tatsache Rechnung zu tragen, daß elektronische Rechengeräte weit verbreitet und leicht zugänglich sind. Zur Begründung einer numerischen Methode werden zuerst die theoretischen Grundlagen vermittelt, soweit sie erforderlich sind, um anschließend das Verfahren so zu formulieren, daß seine Realisierung als Rechenprogramm einfach ist. Die algorithmische Beschreibung erfolgt in einer Form, die sich mit Leichtigkeit in irgendeine der gängigen Programmiersprachen übersetzen läßt. Dem Leser soll damit die Möglichkeit geboten werden, nach Vervollständigung der Algorithmen durch Ein- und Ausgabe-Anweisungen sowie durch Vereinbarungsteile die Arbeitsweise der Methoden auf dem ihm verfügbaren Rechner kennen zu lernen. Zusätzliche Übungsaufgaben findet man etwa in [CoA72, Hai83].

Um die speziellen Kenntnisse auf dem Gebiet der numerischen Integralberechnung, die Herr Dr. J. Waldvogel an der ETH Zürich erarbeitet hat, in das Buch einfließen zu lassen, hat er die Abschnitte 8.1 und 8.2 sowie die zugehörigen Aufgaben verfaßt. Für diese wertvolle Mitarbeit danke ich ihm hiermit bestens. Meinen beiden Assistenten, den Herren Dipl.-Math. W. Businger und H. P. Märchy verdanke ich viele Anregungen und die kritische Durchsicht des Manuskripts, was dazu beigetragen hat, die Darstellung zu verbessern. Schließlich danke ich dem Verlag B. G. Teubner für die Herausgabe des Buches und für die stets freundliche und entgegenkommende Zusammenarbeit.

Die Neuauflage des Buches ist zum Anlaß genommen worden, einmal die bekannt gewordenen Druckfehler zu korrigieren, an einigen Stellen die Darstellung sowohl textlich als auch sachlich zu verbessern, aber auch um einige unwichtigere Dinge und Hinweise wegzulassen. Neben diesen mehr untergeordneten Änderungen wurde die Methode von Householder in der Methode der kleinsten Quadrate neu dargestellt, und das Kapitel über die Behandlung von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist teilweise überarbeitet und leicht erweitert worden. Schließlich hat das Buch eine wesentliche Erweiterung durch die Aufnahme eines ergänzenden Kapitels über die iterative Lösung von großen linearen Gleichungssystemen erfahren, wie sie bei der Diskretisierung von partiellen Differentialgleichungen auftreten, um auf diese Weise den Stoff abzurunden.

An dieser Stelle sei allen Kollegen, Lesern und aufmerksamen Studierenden bestens gedankt für Hinweise auf Fehler und für kritische Anregungen.

Zürich, im Sommer 1991

H. R. Schwarz

Inhalt

1 Lineare Gleichungssysteme, direkte Methoden

1.1	Gaußscher Algorithmus	11
1.1.1	Der fundamentale Rechenprozeß	11
1.1.2	Pivotstrategien	19
1.1.3	Ergänzungen	26
1.2	Genauigkeitsfragen, Fehlerabschätzungen	29
1.2.1	Normen	29
1.2.2	Fehlerabschätzungen, Kondition	35
1.3	Systeme mit speziellen Eigenschaften	39
1.3.1	Symmetrische, positiv definite Systeme	39
1.3.2	Bandgleichungen	45
1.3.3	Tridiagonale Gleichungssysteme	47
1.4	Austausch-Schritt und Inversion von Matrizen	51
1.4.1	Lineare Funktionen, Austausch	51
1.4.2	Matrizeninversion	53
1.5	Aufgaben	56

2 Lineare Optimierung

2.1	Einführungsbeispiele, graphische Lösung	59
2.2	Der Simplex-Algorithmus	64
2.3	Ergänzungen zum Simplex-Algorithmus	71
2.3.1	Degeneration	71
2.3.2	Mehrdeutige Lösung	76
2.3.3	Nichtbeschränkte Zielfunktion	77
2.4	Allgemeine lineare Programme	78
2.4.1	Behandlung von freien Variablen	78
2.4.2	Methode der Koordinatenverschiebung	79
2.4.3	Die Zweiphasenmethode	82
2.5	Diskrete Tschebyscheff-Approximation	86
2.6	Aufgaben	91

3 Interpolation

3.1	Existenz und Eindeutigkeit der Polynominterpolation	94
3.2	Lagrange-Interpolation	95
3.2.1	Rechentechnik	95
3.2.2	Anwendungen	99
3.3	Fehlerabschätzung	104

3.4	Newton-Interpolation	109
3.5	Interpolation nach Aitken-Neville	116
3.5.1	Die Algorithmen von Aitken und Neville	117
3.5.2	Extrapolation und Romberg-Schema	119
3.5.3	Inverse Interpolation	122
3.6	Rationale Interpolation	124
3.6.1	Problemstellung und Problematik	124
3.6.2	Spezielle Interpolationsaufgabe, Thiesescher Kettenbruch	126
3.7	Spline-Interpolation	133
3.7.1	Charakterisierung der Spline-Funktion	133
3.7.2	Berechnung der kubischen Spline-Interpolierenden	136
3.7.3	Allgemeine kubische Spline-Interpolation	140
3.7.4	Periodische kubische Spline-Interpolation	142
3.7.5	Glatte zweidimensionale Kurvendarstellung	145
3.8	Aufgaben	147

4 Funktionsapproximation

4.1	Fourierreihen	150
4.2	Effiziente Berechnung der Fourierkoeffizienten	161
4.2.1	Der Algorithmus von Runge	162
4.2.2	Die schnelle Fouriertransformation	165
4.3	Orthogonale Polynome	175
4.3.1	Die Tschebyscheff-Polynome	175
4.3.2	Tschebyscheffsche Interpolation	183
4.3.3	Die Legendre-Polynome	188
4.4	Aufgaben	193

5 Nichtlineare Gleichungen

5.1	Banachscher Fixpunktsatz	196
5.2	Konvergenzverhalten und Konvergenzordnung	200
5.3	Gleichungen in einer Unbekannten	208
5.3.1	Intervallschachtelung, Regula falsi, Sekantenmethode	208
5.3.2	Verfahren von Newton	214
5.3.3	Interpolationsmethoden	217
5.4	Gleichungen in mehreren Unbekannten	220
5.4.1	Fixpunktiteration und Konvergenz	220
5.4.2	Verfahren von Newton	222
5.5	Nullstellen von Polynomen	228
5.6	Aufgaben	238

6 Eigenwertprobleme

6.1	Das charakteristische Polynom, Problematik	241
6.2	Jacobi-Verfahren	244

6.2.1	Elementare Rotationsmatrizen	245
6.2.2	Das klassische Jacobi-Verfahren	247
6.2.3	Zyklisches Jacobi-Verfahren	252
6.3	Transformationsmethoden	256
6.3.1	Transformation auf Hessenbergform	256
6.3.2	Transformation auf tridiagonale Form	260
6.3.3	Schnelle Givens-Transformation	262
6.3.4	Methode von Hyman	267
6.4	QR-Algorithmus	272
6.4.1	Grundlagen zur QR-Transformation	272
6.4.2	Praktische Durchführung, reelle Eigenwerte	277
6.4.3	QR-Doppelschritt, komplexe Eigenwerte	282
6.4.4	QR-Algorithmus für tridiagonale Matrizen	288
6.4.5	Zur Berechnung der Eigenvektoren	292
6.5	Aufgaben	293

7 Ausgleichsprobleme, Methode der kleinsten Quadrate

7.1	Lineare Ausgleichsprobleme, Normalgleichungen	296
7.2	Methoden der Orthogonaltransformation	301
7.2.1	Givens-Transformation	301
7.2.2	Spezielle Rechentechniken	307
7.2.3	Householder-Transformation	310
7.3	Singulärwertzerlegung	316
7.4	Nichtlineare Ausgleichsprobleme	321
7.4.1	Gauß-Newton-Methode	321
7.4.2	Minimierungsverfahren	325
7.5	Aufgaben	329

8 Integralberechnung

8.1	Die Trapezmethode	331
8.1.1	Problemstellung und Begriffe	332
8.1.2	Definition der Trapezmethode und Verfeinerung	332
8.1.3	Die Euler-Maclaurinsche Summenformel	335
8.1.4	Das Romberg-Verfahren	337
8.1.5	Adaptive Quadraturverfahren	340
8.2	Transformationsmethoden	343
8.2.1	Periodische Integranden	343
8.2.2	Integrale über \mathbb{R}	345
8.2.3	Transformationsmethoden	347
8.3	Interpolatorische Quadraturformeln	351
8.3.1	Newton-Cotes Quadraturformeln	351
8.3.2	Gaußsche Quadraturformeln	359
8.4	Aufgaben	365

9 Gewöhnliche Differentialgleichungen

9.1	Einschrittmethoden	368
9.1.1	Die Methode von Euler und der Taylorreihe	368
9.1.2	Diskretisationsfehler, Fehlerordnung	372
9.1.3	Verbesserte Polygonzugmethode, Trapezmethode, Verfahren von Heun	376
9.1.4	Runge-Kutta-Verfahren	381
9.1.5	Implizite Runge-Kutta-Verfahren	391
9.1.6	Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme	393
9.2	Mehrschrittverfahren	396
9.2.1	Die Methoden von Adams-Bashforth	397
9.2.2	Die Methoden von Adams-Moulton	400
9.2.3	Allgemeine Mehrschrittverfahren	403
9.3	Stabilität	413
9.3.1	Inhärente Instabilität	413
9.3.2	Absolute Stabilität	414
9.3.3	Steife Differentialgleichungen	423
9.4	Aufgaben	428

10 Partielle Differentialgleichungen

10.1	Elliptische Randwertaufgaben, Differenzenmethode	431
10.1.1	Problemstellung	431
10.1.2	Diskretisation der Aufgabe	433
10.1.3	Randnahe Gitterpunkte, allgemeine Randbedingungen	438
10.1.4	Diskretisationsfehler	450
10.1.5	Ergänzungen	462
10.2	Parabolische Anfangsrandwertaufgaben	465
10.2.1	Eindimensionale Probleme, explizite Methode	465
10.2.2	Eindimensionale Probleme, implizite Methode	471
10.2.3	Diffusionsgleichung mit variablen Koeffizienten	476
10.2.4	Zweidimensionale Probleme	478
10.3	Methode der finiten Elemente	483
10.3.1	Grundlagen	483
10.3.2	Prinzip der Methode der finiten Elemente	486
10.3.3	Elementweise Bearbeitung	488
10.3.4	Aufbau und Behandlung der linearen Gleichungen	493
10.3.5	Beispiele	494
10.4	Aufgaben	497

11 Lineare Gleichungssysteme, iterative Verfahren

11.1	Gesamtschritt- und Einzelschrittverfahren	501
11.1.1	Konstruktion der Iterationsverfahren	501
11.1.2	Einige Konvergenzsätze	507

11.1.3	Optimaler Relaxationsfaktor der Überrelaxation	520
11.2	Methode der konjugierten Gradienten	527
11.2.1	Herleitung des Algorithmus	527
11.2.2	Eigenschaften der Methode der konjugierten Gradienten	532
11.2.3	Konvergenzabschätzung	535
11.2.4	Vorkonditionierung	538
11.3	Methode der verallgemeinerten minimierten Residuen	545
11.3.1	Grundlagen des Verfahrens	545
11.3.2	Algorithmische Beschreibung und Eigenschaften	548
11.4	Speicherung schwach besetzter Matrizen	554
11.5	Aufgaben	557
 Literatur		 561
 Sachverzeichnis		 571