Horst Knörrer

Geometrie

vieweg studium
Aufbaukurs Mathematik

Herausgegeben von Martin Aigner, Gerd Fischer,
Michael Grüter, Manfred Knebusch, Gisbert Wüstholz

Martin Aigner
Diskrete Mathematik

Albrecht Beutelspacher und Ute Rosenbaum
Projektive Geometrie

Manfredo P. do Carmo
Differentialgeometrie von Kurven und Flächen

Gerd Fischer
Ebene algebraische Kurven

Wolfgang Fischer und Ingo Lieb
Funktionentheorie

Wolfgang Fischer und Ingo Lieb
Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie

Otto Forster
Analysis 3

Manfred Knebusch und Claus Scheiderer
Einführung in die reelle Algebra

Horst Knörrer
Geometrie

Ulrich Krengel
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Ernst Kunz
Algebra

Reinhold Meise und Dietmar Vogt
Einführung in die Funktionalanalysis

Erich Ossa
Topologie

Alexander Prestel
Einführung in die mathematische Logik und Modelltheorie

Jochen Werner
Numerische Mathematik 1 und 2

Advanced Lectures in Mathematics

Herausgegeben von Martin Aigner, Gerd Fischer,
Michael Grüter, Manfred Knebusch, Gisbert Wüstholz

Wolfgang Ebeling
Lattices and Codes

Martin Fuchs
Topics in the Calculus of Variations

Jesus M. Ruiz
The Basic Theory of Power Series

Horst Knörrer

Geometrie

Mit 234 Bildern

vieweg

Prof. Dr. Horst Knörrer
ETH Zürich
Mathematik
ETH Zentrum
CH-8092 Zürich

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Bertelsmann Fachinformation GmbH.

ISBN 978-3-528-07271-1 ISBN 978-3-322-93980-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-93980-7

Vorwort

Wieder ein anderes Mal, als ich vor der Tafel stand und mit Kreide allerlei Figuren zeichnete, kam mir plötzlich der Gedanke: „Warum ist die Symmetrie den Augen angenehm? Was ist eigentlich die Symmetrie?" – „Sie ist ein angeborenes Gefühl", gab ich mir selbst zur Antwort. „Worauf beruht sie? Herrscht denn in allem im Leben Symmetrie? Im Gegenteil, da ist das Leben – ", und ich zeichnete eine ovale Figur auf die Tafel. „Nach dem Leben geht die Seele in die Ewigkeit hinüber – da ist die Ewigkeit" – und ich zog von der einen Seite des Ovals einen Strich bis an den Rand der Tafel. „Warum ist denn auf der anderen Seite nicht auch ein solcher Strich? In der Tat, wie kann es denn eine einseitige Ewigkeit geben, wir haben gewiß schon vor diesem Leben existiert, obwohl wir die Erinnerung daran verloren haben." Diese Überlegung, die mir außerordentlich neu und klar vorkam und deren logischen Zusammenhang ich jetzt nur mit Mühe wiederfinden kann, gefiel mir sehr, und ich nahm ein Blatt Papier, um sie schriftlich darzulegen, aber dabei kam mir eine solche Menge Gedanken in den Kopf, daß ich aufstehen mußte und im Zimmer auf und ab gehen. Als ich zum Fenster kam, erregte ein Pferd meine Aufmerksamkeit, das der Kutscher gerade vor einen Wasserwagen spannte, und alle meine Gedanken konzentrierten sich auf die Frage: In welches Tier oder in welchen Menschen wird die Seele dieses Pferdes übergehen, wenn es krepiert? In diesem Augenblick ging Wolodja durchs Zimmer und lächelte, als er merkte, daß ich über etwas nachdachte, und dieses Lächeln genügte, mich zu der Einsicht zu bringen, daß alles, worüber ich nachgedacht hatte, ein schrecklicher Unsinn war.

(aus: L. Tolstoj: Knabenalter[1])

Irgendwie haben sich die meisten Menschen schon einmal über das Wesen von Raum und Zeit Gedanken gemacht. Wenn Mathematiker dies berufsmäßig tun, nennen sie das Ergebnis Geometrie.

Die Geometrie ist die älteste systematisierte mathematische Disziplin. Die vielfältigen Verallgemeinerungen des Raumbegriffs in der Mathematik und der Physik sind ein Grund dafür, daß sich bis heute immer wieder neue Probleme ergeben, die mit geometrischen Methoden behandelt werden können und manchmal sogar die Entwicklung neuer geometrischer Disziplinen notwendig machen.

Trotz ihrer großen Bedeutung wird die Geometrie im Grundstudium der Mathematik und Physik meist nur nebenbei behandelt. Man hält es – wohl mit einigem Recht – für ökonomischer, zunächst mit Analysis und Linearer Algebra allgemeine Strukturen und Theorien zu unterrichten, die es ermöglichen, später – oder auch nebenher – geometrische Probleme leichter zu behandeln.

So entsteht oft eine Lücke zwischen Schulgeometrie und den modernen geometrischen Theorien, die man im Hauptstudium kennenlernen kann. Dieses Buch bietet die Möglichkeit, die Lücke zu verkleinern. Es enthält einige in Mathematik und Physik wichtige geometrische Themen, die „elementar" sind in dem Sinne, daß zu ihrem Verständnis die Kenntnis abstrakter Theorien und Begriffe nicht notwendig ist [2]. Andererseits sind eine Reihe der dargestellten Resultate insofern „nicht elementar",

[1] Mit freundlicher Genehmigung des Insel Verlages zitiert aus L. Tolstoj: *Kindheit und Jugend*, insel taschenbuch 203.

[2] Einzige Ausnahme bildet das Konzept der „Gruppe", das in Kapitel 1 am Beispiel der Symmetriegruppen eingeführt wird und vor allem in den Kapiteln 1, 3 und 6 eine wichtige Rolle spielt.

als sowohl die Fragestellungen als auch die bei ihrer Lösung entwickelten Ideen weit über die Vorstellung von Geometrie, wie sie in der Schule vermittelt wird, hinausgehen.
Die Leserinnen und Leser können in diesem Buch exemplarisch verfolgen, wie Mathematik funktioniert – und zwar an interessanten, anschaulichen, aber nicht trivialen Beispielen. Die dabei erforderlichen Vorkenntnisse gehen kaum über Schulwissen, sicher aber nicht über den Stoff des ersten Semesters Mathematik oder Physik hinaus [3]. In den Ergänzungen zu den einzelnen Kapiteln habe ich die Beschränkung auf ganz elementare Vorkenntnisse fallen lassen. Die behandelten Themen werden dort vertieft; es werden Querverbindungen zwischen den einzelnen Kapiteln gezogen und Hinweise auf andere Gebiete der Mathematik und der Physik gegeben, mit denen die Themen in Beziehung stehen.

Auf einen wichtigen Aspekt der modernen Geometrie wird implizit hingearbeitet - nämlich daß „Raum" nicht unbedingt der dreidimensionale Euklidische Raum ist, sondern daß viele andere Räume existieren, die geometrisch untersucht werden können und müssen. Dies beginnt in Kapitel 3 mit der Diskussion der nichteuklidischen Geometrie, findet seine Fortsetzung im Abschnitt 5.4 über die der speziellen Relativitätstheorie zugrundeliegende Lorentz-Geometrie, und kulminiert in den Abschnitten 6.3 - 6.7, in denen die Gruppe $SO(3)$ selbst einen Raum bildet, dessen Geometrie untersucht wird. In diesem Zusammenhang wird mit der Fundamentalgruppe auch ein Konzept der „höheren Geometrie" vorgestellt, das paradigmatisch ist für eine ganze geometrische Disziplin, die algebraische Topologie.

Geometrie ist naturgemäß anschaulich – und die Anschauung steht in diesem Buch auch im Vordergrund. Auf präzise Beweise wird jedoch nie verzichtet. Wenn man von mathematisch strengen Beweisen spricht, stellt sich natürlich die Frage, wo die Beweise verankert sind, d.h. welche Tatsachen als bekannt und nicht eines Beweises bedürftig angenommen werden. Dies variiert im Laufe des Buches. In den ersten beiden Kapiteln (*Symmetrie und Symmetriegruppen, Elementare Vektorrechnung*) wird mit dem „naiven" Raum - und Vektorbegriff der Schule gearbeitet – Puristen wird wohl die „Rechte-Hand-Regel" in Satz 2.2 stören. Kapitel 3 beginnt mit einer kritischen Diskussion der Axiome in Euklid's Elementen, stellt dann das Hilbert'sche Axiomensystem vor, und enthält den Beweis der Unabhängigkeit des Parallelenaxioms durch Angabe des Poincaré-Modells der hyperbolischen Ebene. Dabei werden die Grundeigenschaften der reellen und komplexen Zahlen als bekannt vorausgesetzt. Ab Kapitel 4 wird Geometrie durch Einführung cartesischer Koordinaten (im formal-logischen Sinn) auf Operationen mit Tupeln reeller Zahlen zurückgeführt.

Die einzelnen Kapitel des Buches sind nahezu unabhängig voneinander (genauere Informationen enthält Anhang A). Neben den im Text und in den Ergänzungen gegebenen Ausblicken enthält Anhang B Hinweise auf weiterführende Literatur.

[3] In Anhang A sind die für die einzelnen Abschnitte erforderlichen Vorkenntnisse zusammengestellt.

Viele haben zur Entstehung dieses Buches beigetragen. Zuallererst die Erstsemesterstudentinnen und -studenten der Mathematik und Physik an der ETH Zürich, für die ich wiederholt die Geometrievorlesung halten durfte. Mit ihrem Interesse an der Geometrie und ihrer geduldigen und konstruktiven Kritik hatten sie wesentlichen Einfluß auf die Entwicklung der Vorlesung und damit auf dieses Buch. Für viele kritische Bemerkungen und wichtige Verbesserungsvorschläge danke ich auch Albert Gächter, Wolfgang Ingrisch und Erwin Neuenschwander. Die Bilder haben Nicolette Bösch, Daniel Darms, Harald Deppeler, Roland Friedrich und Marianne Pfister angefertigt, und der Text wurde geschrieben von Harald Deppeler, Wolfgang Gehrig, Marianne Kellersberger und Matthias Zürcher. Jörg Knappen vereinheitlichte im Auftrag des Vieweg-Verlags die mit diversen LaTeX- und TeX- Macros geschriebenen Teile des Manuskripts. Schliesslich besorgte Harald Deppeler auch das Layout.
Allen Beteiligten danke ich herzlich.

Zürich, im Februar 1996

Inhaltsverzeichnis