

Albrecht Beutelspacher

**Lineare Algebra**

## Mathematik für Studienanfänger

Andreas Bartholomé/Josef Rung/Hans Kern  
**Zahlentheorie für Einsteiger**

Albrecht Beutelspacher  
**„Das ist o. B. d. A. trivial!“**

Albrecht Beutelspacher  
**Lineare Algebra**

Albrecht Beutelspacher/Marc Zschiegner  
**Lineare Algebra interaktiv (CD ROM)**

Gerd Fischer  
**Lineare Algebra**

Hannes Stoppel/Birgit Griese  
**Übungsbuch zur Linearen Algebra**

Gerd Fischer  
**Analytische Geometrie**

Otto Forster  
**Analysis 1**

Otto Forster/Rüdiger Wessoly  
**Übungsbuch zur Analysis 1**

Otto Forster  
**Analysis 2**

Otto Forster/Thomas Szymczak  
**Übungsbuch zur Analysis 2**

Norbert Henze  
**Stochastik für Einsteiger**

Arnfried Kemnitz  
**Mathematik zum Studienbeginn**

Winfried Scharlau  
**Schulwissen Mathematik:  
Ein Überblick**

**vieweg**

Albrecht Beutelspacher

# Lineare Algebra

**Eine Einführung in die Wissenschaft  
der Vektoren, Abbildungen und Matrizen**

Mit liebevollen Erklärungen, einleuchtenden Beispielen  
und lohnenden Übungsaufgaben, nicht ohne lustige Sprüche,  
launigen Ton und leichte Ironie, dargestellt zu Nutzen  
der Studierenden der ersten Semester

5., durchgesehene Auflage



Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher  
Mathematisches Institut  
Justus-Liebig-Universität Gießen  
Arndtstraße 2  
D-35392 Gießen  
E-mail: [albrecht.beutelspacher@math.uni-giessen.de](mailto:albrecht.beutelspacher@math.uni-giessen.de)  
<http://www.uni-giessen.de/beutelspacher/>

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme  
Ein Titeldatensatz für diese Publikation ist bei  
Der Deutschen Bibliothek erhältlich.

1. Auflage 1994
- 2., durchgesehene Auflage 1995
- 3., durchgesehene Auflage 1998
- 4., durchgesehene Auflage 2000
- 5., durchgesehene Auflage Februar 2001

ISBN 978-3-528-46508-7    ISBN 978-3-322-92846-7 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-322-92846-7

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 2001

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer.



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

[www.vieweg.de](http://www.vieweg.de)

Konzeption und Layout des Umschlags: Ulrike Weigel, [www.CorporateDesignGroup.de](http://www.CorporateDesignGroup.de)

Gedruckt auf säurefreiem Papier

# Mathematik – eine Mutprobe?

*Mein stolzes Beginnen lief darauf hinaus: Allerkleinstes – auch Prosaisches nicht ausgeschlossen – exakt und minutiös zu schildern und durch scheinbar einfachste, aber gerade deshalb schwierigste Mittel: Simplizität, Durchsichtigkeit im einzelnen und Übersichtlichkeit im ganzen, auf eine gewisse künstlerische Höhe zu heben, ja, es dadurch sogar interessant oder wenigstens lesensmöglich zu machen.*

Theodor Fontane

Dies ist ein Buch für Anfänger der Mathematik. Es will sich von all seinen Vorgängern und Konkurrenten vor allem dadurch unterscheiden, daß es bewußt und direkt auf die Studierenden zugeht. Ja, unter den vielen Büchern über lineare Algebra, die Sie in der Bibliothek oder einer Buchhandlung finden, eignet sich dieses besonders dafür, Ihr *erstes* Mathematikbuch zu sein. Der Titel hätte auch lauten können „Meine erste Lineare Algebra“.

Dieses Buch soll Ihnen Mut machen, die Mathematik zu meistern, und Sie nicht durch Unverständlichkeit einschüchtern. Beim Schreiben habe ich mich daher von folgenden Ideen leiten lassen:

## **Keine abgehobene Sprache!**

Anfänger haben es schwer mit der Mathematik. Sie tun sich besonders schwer mit der mathematischen Sprache. Dieser kalte Formalismus! Diese unbarmherzige Präzision! Diese unendliche Distanz! Diese schwindelerregende Abstraktheit!

Ja, die Mathematik ist eine Wissenschaft, die auf formalen Schlüssen basiert – das ist ihre Stärke. Die mathematische Sprache ist präzise und dadurch gegen Irrtümer gefeit. Durch Abstraktheit (was nichts anderes als „Vereinfachung“ bedeutet) wird Erkenntnisfortschritt oft erst möglich. Aber die Tatsache bleibt: Die mathematische Sprache läßt Anfänger in der Regel nicht zum Lesen oder zum Mitmachen ein.

Mit diesem Buch versuche ich eine Quadratur des Kreises, nämlich einerseits, wo es nur geht, diese Sprachbarriere abzubauen, andererseits Sie, liebe Leserin, lieber Leser, vom Nutzen der präzisen Sprache der Mathematik zu überzeugen. Insbesondere werden Sie erfahren, daß Präzision nicht unbedingt etwas mit Formalismus – und schon gar nicht mit trockenem Stil zu tun hat.

Der Stil ist für ein Mathematikbuch ganz unüblich: locker, lustig, leicht und unterhaltsam. Und vor allem habe ich versucht, die üblichen k.o.-Schläge wie etwa „wie man leicht sieht“, „trivialerweise folgt“, „man sieht unmittelbar“ zu vermeiden.

### **Keine unnötig abstrakte Theorie!**

Was ist das Ziel einer Vorlesung oder eines Buches über lineare Algebra? Ihnen sollen die wichtigsten Grundkonzepte algebraischen Denkens, algebraische Kenntnisse und Fertigkeiten sowie Anwendungen vermittelt werden. (In diesem Buch finden Sie Anwendungen in Geometrie, beim Lösen von Gleichungssystemen und in der Codierungstheorie.)

Wir werden Themen wie Äquivalenzrelationen, Faktorräume, Polynomringe und natürlich die Hauptthemen der linearen Algebra, nämlich Vektorräume, lineare Abbildungen und Diagonalisierbarkeit ausführlich behandeln.

Mir geht es nicht darum, die lineare Algebra mit allen Feinheiten und in voller Allgemeinheit zu präsentieren – in der Hoffnung, daß Kenner anerkennend mit dem Kopf nicken, aber mit dem Effekt, daß die Studierenden den Wälzer wütend an die Wand werfen.

### **Nicht Rechnen. Denken!**

Dies ist keine „Lineare Algebra light“, keine Ausgabe „für kleine Hände“. Es kommt mir mindestens so sehr auf begriffliche Klarheit wie auf technische Fertigkeiten an:

- Vektorräume werden „allgemein“ behandelt und nicht von vornherein auf  $K^n$ ,  $\mathbf{R}^n$  (oder gar  $\mathbf{R}^3$ ) beschränkt. Dadurch wird die Sache einfacher! Denn ein allgemeiner Vektorraum ist ein einfacheres Objekt als ein Vektorraum, bei dem man sich immer noch mit einer festen Basis herumschlagen (oder -ärgern) muß.
- Die berüchtigten Faktorräume werden ausführlich behandelt – obwohl man Faktorräume in der Linearen Algebra ja zur Not vermeiden könnte. Ich halte aber das Konzept des Faktorraums bzw. der Quotientenstrukturen für so wichtig, daß man das schon im ersten Semester kennenlernen sollte. (Außerdem habe ich das so gut erklärt, daß es jeder verstehen kann!)
- Auch wird in diesem Buch die Theorie der linearen Abbildungen nicht auf Matrizenbolzelei reduziert. Schwierigkeiten werden weder ausgespart noch wird über sie hinweggemogelt.

### **Viele Übungsaufgaben!**

Sie finden drei Sorten von Übungsaufgaben. Zunächst ganz einfache Kästchenaufgaben, die in der Regel aus einer „ganz dummen“ Frage bestehen. Diese dienen zur unmittelbaren Selbstkontrolle, ob Sie den Stoff verstanden haben. Lösungen zu diesen Aufgaben finden Sie am Ende des Buches.

Die eigentlichen Übungsaufgaben gehen etwas tiefer – aber auch diese sind (fast) alle leicht zu lösen. Ich habe mich bemüht, keine unnötigen Tricks einzubauen, sondern Ihnen Erfolgserlebnisse zu ermöglichen!

Schließlich gibt es „Projekte“, das ist eine Menge zusammengehöriger Übungsaufgaben, mit denen Sie eingeladen werden, ein neues, aber mit dem Stoff des jeweiligen Kapitels eng zusammenhängendes Thema selbständig zu erarbeiten.

Alles in allem über 300 Übungsaufgaben!

Übrigens plane ich als Fortsetzung ein „elektronisches Übungsbuch“ zur Linearen Algebra, wo mit Hilfe eines Computeralgebrasystems viele Übungsaufgaben gestellt und gelöst werden können.

Wenn in einer Vorlesung an einer Universität eine Studentin oder ein Student den Stoff nicht beherrscht und deswegen keinen Schein erhält, so liegt dies – so glauben Lehrende und Lernende übereinstimmend – unzweifelhaft an der Unfähigkeit der Studentin bzw. des Studenten. Ganz anders bei professionellen Kursen im Bereich der Wirtschaft und Industrie. Dort herrschen andere Verhältnisse: Wenn ein Teilnehmer eines Kurses etwas nicht versteht, ist dies eindeutig die Schuld des Dozenten!

Mit diesem Buch stelle ich mich bewußt auf die „professionelle“ Seite: Wenn Sie etwas nicht verstehen, trage ich die Schuld daran. Falls Sie Kritik oder sogar Verbesserungsvorschläge haben, bitte ich Sie, mir ohne Hemmungen zu schreiben.

Einige Hinweise zum Aufbau des Buches: Ich habe mit vielerlei Mitteln versucht, einen lesbaren Text zu verfassen. Einige dieser Mittel sind äußerlich zu erkennen:

- Die Aussagen der Sätze sind *kursiv* gedruckt. Die Sätze sind nicht durchnummeriert, dafür hat (fast) jeder Satz einen Namen; so können Sie ihn über das Stichwortverzeichnis finden.
- Eine Definition erkennt man nicht daran, daß davor „Definition“ steht, sondern daran, daß der zu definierende Begriff **fett** gedruckt ist.
- Das Ende eines jeden Beweises wird durch das Beweisabschlußzeichen angezeigt. Aber auch das Ende eines Satzes, der (meiner Ansicht nach) keines Beweises bedarf, wird so gekennzeichnet: □

Obwohl dies ein Buch für Anfänger ist, setze ich gewisse Dinge voraus. So werden etwa Mengenlehre und Beweisprinzipien zwar behandelt – aber nicht sehr ausführlich, damit wir bald zum „eigentlichen“ Stoff kommen.

Mein Dank geht an viele, die mich beim Entstehen dieses Buches unterstützt, ermutigt und beraten haben. Zuallererst danke ich den Hörerinnen und Hörern meiner Vorlesung über Lineare Algebra; für sie hatte ich ein Skriptum geschrieben, das die Grundlage für dieses Buch wurde. Und wenn das Skriptum bei den Studierenden nicht so gut angekommen wäre, wäre ich nie auf den Gedanken gekommen, dieses Buch zu schreiben.

Damals hat Herr Alexander Pott die Übungen betreut, und manche Übungsaufgaben habe ich aus unserem damaligen Vorrat genommen. Jörg Eisfeld, Udo Heim, Ute Rosenbaum und Johannes Ueberberg haben nicht nur das Manuskript mit Akribie und Einfühlung gelesen, sondern mir immer wieder Mut gemacht, das Buch doch so zu schreiben, wie es mir vorschwebte. Frau Susanne Hunsdorfer hat das einfühlsame Schlußbild gemalt. Allen gilt mein herzlicher Dank.

Als ich mich schon in der Hoffnung wiegte, das Buch sei fertig, habe ich es auf Anregung des Verlags nochmals einer Gruppe junger Studierender zum Lesen gegeben. Und so wurde eine bislang unentdeckte Schicht von Fehlern und Verbesserungsmöglichkeiten ans Licht befördert. Schande über mein Haupt und Tausend Dank an die Studierenden! (Und das heißt immerhin mehr als ein Dank pro entdecktem Fehler.)

Studierende, die es mit der Mathematik wagen wollen, brauchen Mut. Auch ein Autor braucht Mut – jedes neue Buch ist ein neues Wagnis. Aber auch ein Verlag braucht Mut für ein solches Buch. Daher danke ich dem Verlag Vieweg, und ganz besonders Frau Döbert und Frau Schmickler-Hirzebruch sehr, daß sie dieses Buch wagen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort: Mathematik – eine Mutfrage?</b> .....	v
<b>Inhaltsverzeichnis</b> .....	viii
<b>1 Was wir wissen müssen, bevor wir anfangen können</b> .....	1
1.1 Mengen .....	1
1.2 Äquivalenzrelationen .....	4
1.3 Abbildungen.....	6
1.4 Wann haben zwei Mengen gleich viele Elemente? .....	11
1.5 Die $\Sigma$ -Notation .....	16
1.6 Beweisprinzipien.....	18
Richtig oder falsch? .....	19
Übungsaufgaben .....	20
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:.....	23
Was sagen Sie dazu?.....	23
<b>2 Körper</b> .....	24
2.1 Die Definition .....	24
2.2 Beispiele von Körpern .....	27
2.2.1 Der Körper der komplexen Zahlen.....	27
2.2.2 Der Quaternionenschiefkörper .....	30
2.2.3 Einige endliche Körper.....	33
2.3 Automorphismen von Körpern .....	39
2.3.1 Die Definitionen .....	39
2.3.2 Der Körper der rationalen Zahlen.....	40
2.3.3 Der Körper der reellen Zahlen.....	41
2.3.4 Konjugiert-komplexe Zahlen.....	42
Richtig oder falsch? .....	43
Übungsaufgaben .....	44
Projekt: Die Gaußsche Zahlenebene .....	46
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:.....	47
<b>3 Vektorräume</b> .....	48
3.1 Die Definition .....	48
3.2 Beispiele von Vektorräumen.....	50
3.2.1 Vektorräume mit Hilfe von Geometrie.....	50
3.2.2 Der Vektorraum $K^n$ .....	50
3.2.3 Der Vektorraum aller $m \times n$ -Matrizen.....	50
3.2.4 Der Vektorraum aller unendlichen Folgen .....	51



3.2.5	Ein Vektorraum unendlicher Folgen .....	52
3.2.6	Vektorräume von Funktionen .....	52
3.2.7	Lösungen eines Gleichungssystems .....	52
3.2.8	Teilmengen einer Menge .....	52
3.2.9	Körper als Vektorräume .....	53
3.3	Elementare Theorie der Vektorräume .....	54
3.3.1	Der Begriff der Basis .....	54
3.3.2	Der Steinitzsche Austauschsatz .....	61
3.3.3	Der Dimensionssatz .....	67
3.3.4	Faktorräume .....	69
3.4	Zur Geschichte der linearen Algebra .....	75
	Richtig oder falsch? .....	77
	Übungsaufgaben .....	79
	Projekt: Der unendlichdimensionale Vektorraum $V_\infty$ .....	84
	Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können: .....	86
<b>4</b>	<b>Anwendungen von Vektorräumen .....</b>	<b>87</b>
4.1	Affine Geometrie .....	87
4.1.1	Affine Räume .....	87
4.1.2	Unterräume .....	90
4.2	Lineare Gleichungssysteme .....	92
4.2.1	Begriffe und Fragen .....	92
4.2.2	Exkurs über Matrizen .....	93
4.2.3	Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen .....	97
4.2.4	Der Gaußsche Algorithmus .....	102
4.3	Codierungstheorie .....	108
4.3.1	Grundlegende Begriffe .....	108
4.3.2	Lineare Codes .....	111
	Richtig oder falsch? .....	117
	Übungsaufgaben .....	118
	Projekt: Die Hamming-Codes .....	121
	Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können: .....	123
	Was sagen Sie dazu? .....	123
<b>5</b>	<b>Lineare Abbildungen .....</b>	<b>124</b>
5.1	Definitionen und grundlegende Eigenschaften .....	124
5.2	Darstellung von linearen Abbildungen durch Matrizen .....	130
5.3	Der Homomorphiesatz .....	136
5.4	Der Dualraum .....	139
	Richtig oder falsch? .....	143
	Übungsaufgaben .....	144
	Projekt: $\text{Hom}(V, W)$ .....	147
	Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können: .....	147

<b>6 Polynomringe</b> .....	148
6.1 Ringe .....	148
6.2 Was ist eigentlich $x$ ? .....	150
6.3 Polynomdivision .....	156
6.4 Ideale von $K[x]$ .....	160
Richtig oder falsch? .....	162
Übungsaufgaben .....	163
Projekte .....	166
Projekt A: Der Ring $\mathbf{Z}$ .....	166
Projekt B: Der Ring $\mathbf{H}[x]$ .....	168
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:.....	169
<b>7 Determinanten</b> .....	170
7.1 Die Determinantenfunktion .....	170
7.2 Permutationen .....	173
7.3 Gerade und ungerade Permutationen .....	177
7.4 Die Leibnizsche Determinantenformel .....	182
7.5 Wie berechnet man eine Determinante? .....	186
7.6 Der Multiplikationssatz.....	195
Richtig oder falsch? .....	197
Übungsaufgaben .....	198
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:.....	199
Was sagen Sie dazu?.....	200
<b>8 Diagonalisierbarkeit</b> .....	201
8.1 Eigenvektoren und Eigenwerte .....	202
8.2 Das charakteristische Polynom .....	207
8.3 Das Minimalpolynom .....	213
Richtig oder falsch? .....	221
Übungsaufgaben .....	222
Projekt: Drehungen .....	225
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:.....	226
Was sagen Sie dazu?.....	226
<b>9 Elementarste Gruppentheorie</b> .....	227
9.1 Beispiele von Gruppen.....	227
9.1.1 Gruppen in bekannten Strukturen.....	228
9.1.2 Gruppen aus bekannten Objekten.....	229
9.1.3 Gruppen aus Permutationen .....	230
9.2 Einfache Strukturaussagen für Gruppen .....	233
9.2.1 Untergruppen .....	233
9.2.2 Zyklische Gruppen .....	235
9.2.3 Der Homomorphiesatz.....	238

Richtig oder falsch? .....	241
Übungsaufgaben .....	242
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können:.....	244
<b>10 Skalarprodukte</b> .....	<b>245</b>
10.1 Ein Beispiel.....	245
10.2 Bilinearformen.....	247
10.3 Skalarprodukte.....	255
10.4 Orthogonale Abbildungen .....	262
10.5 ... und eine zweite symmetrische Bilinearform? .....	270
Richtig oder falsch? .....	273
Übungsaufgaben .....	274
Projekt: Skalarprodukte komplexer Vektorräume .....	276
Sie sollten mit folgenden Begriffen umgehen können: .....	278
<b>Adieu!</b> .....	<b>279</b>
<b>Lösungsvektoren der □-Aufgaben</b> .....	<b>280</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b> .....	<b>282</b>
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	<b>289</b>