

Wolfgang Kühnel

**Differentialgeometrie**

# vieweg studium

## Aufbaukurs Mathematik

Herausgegeben von Martin Aigner, Peter Gritzmann, Volker Mehrmann  
und Gisbert Wüstholz

Martin Aigner

**Diskrete Mathematik**

Walter Alt

**Nichtlineare Optimierung**

Albrecht Beutelspacher und Ute Rosenbaum

**Projektive Geometrie**

Manfredo P. do Carmo

**Differentialgeometrie von Kurven und Flächen**

Gerd Fischer

**Ebene algebraische Kurven**

Wolfgang Fischer und Ingo Lieb

**Funktionentheorie**

Otto Forster

**Analysis 3**

Klaus Hulek

**Elementare Algebraische Geometrie**

Horst Knörrer

**Geometrie**

Helmut Koch

**Zahlentheorie**

Ulrich Krengel

**Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik**

Wolfgang Kühnel

**Differentialgeometrie**

Ernst Kunz

**Einführung in die algebraische Geometrie**

Werner Lütkebohmert

**Codierungstheorie**

Reinhold Meise und Dietmar Vogt

**Einführung in die Funktionalanalysis**

Erich Ossa

**Topologie**

Jochen Werner

**Numerische Mathematik I und II**

Jürgen Wolfart

**Einführung in die Zahlentheorie und Algebra**

Wolfgang Kühnel

# Differentialgeometrie

Kurven – Flächen – Mannigfaltigkeiten

2., überarbeitete Auflage



Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek  
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;  
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

Prof. Dr. Wolfgang Kühnel  
Fachbereich Mathematik  
Universität Stuttgart  
70550 Stuttgart  
[kuehnel@mathematik.uni-stuttgart.de](mailto:kuehnel@mathematik.uni-stuttgart.de)

1. Auflage August 1999  
2., überarbeitete Auflage März 2003

Alle Rechte vorbehalten  
© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 2003

Der Vieweg Verlag ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer.  
[www.vieweg.de](http://www.vieweg.de)



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, [www.CorporateDesignGroup.de](http://www.CorporateDesignGroup.de)

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

ISBN 978-3-528-17289-3      ISBN 978-3-322-92808-5 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-322-92808-5

# Vorwort

Dieses Buch entstand aus Vorlesungen über das Thema „Differentialgeometrie“, die der Autor wiederholt und an verschiedenen Orten gehalten hat. Vom Umfang her entspricht es einer einsemestrigen Vorlesung über klassische Differentialgeometrie (das sind die Kapitel 1–4 des Buches), gefolgt von einer ebenfalls einsemestrigen Vorlesung über Riemannsche Geometrie (Kapitel 5–8). Die wesentlichen Vorkenntnisse sollten in den üblichen Standardvorlesungen des Grundstudiums (1.–3. Semester) bereitgestellt sein: Lineare Algebra und Analysis, einschließlich Differential- und Integralrechnung in mehreren Veränderlichen. Komplexe Funktionen werden lediglich in Abschnitt 3D (Minimalflächen) verwendet. Daher eignet sich das Buch als Begleitlektüre zu einer Vorlesung ab dem 4. Semester, und zwar ausdrücklich auch für Lehramtsstudenten und – das gilt besonders für das Kapitel 8 – auch für Physikstudenten. Naturgemäß kann der Anspruch nicht sein, dabei wissenschaftliches Neuland zu betreten. Vielmehr geht es um das Bereitstellen der grundlegenden Begriffe und Methoden, die dann – darauf aufbauend – das Studium der größeren Werke zur klassischen und modernen Differentialgeometrie erst ermöglichen. Besonders in den Anfangs-Kapiteln wird großer Wert auf Anschaulichkeit gelegt, was durch zahlreiche Abbildungen dokumentiert wird. Die nach Ansicht des Autors besonders wichtigen Dinge sind in Kästchen eingerahmt, um sie besonders hervorzuheben. Diese stellen sozusagen ein Gerüst des Inhalts dar.

Dieses Buch wäre nicht möglich gewesen ohne die Unterstützung meiner Studenten und Mitarbeiter, die zahlreiche Fehler aus den ersten Versionen eliminiert haben. Ich nenne hier besonders Gunnar Ketelhut, Eric Sparla, Michael Steller und Gabriele Preissler, die sehr intensiv Korrektur gelesen haben. Von G.Ketelhut stammen auch zahlreiche inhaltliche Verbesserungsvorschläge sowie der allerletzte Teil in Abschnitt 8F. Martin Renner hat fast alle Bilder mit dem Computeralgebra-System MAPLE erstellt, Marc-Oliver Otto hat einige Bilder für Kapitel 7 beigesteuert, Ilva Maderer hat die Ur-Version (die auch als Skript verteilt wurde) in  $\text{\LaTeX}$  geschrieben. Schließlich hat Michael Grüter als Reihen-Herausgeber hilfreiche Anmerkungen gemacht und mich in verschiedener Hinsicht ermutigt, und dem energischen Engagement von Frau Schmickler-Hirzebruch ist es zu verdanken, daß es so schnell in die Reihe „Vieweg-Studium Aufbaukurs Mathematik“ aufgenommen und dann mit nicht allzu großer Verspätung auch fertig wurde. Ihnen allen sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

Stuttgart, im Juni 1999

*W. Kühnel*

Für die zweite Auflage wurden alle Kapitel gründlich überarbeitet. In mathematischer Hinsicht wurden Fehler korrigiert, und es wurden an manchen Stellen Ergänzungen sowie einige zusätzliche Übungsaufgaben und Abbildungen eingefügt. Auch sprachlich wurde der Text verbessert, das letztere unter der kundigen Anleitung von Maren Dors. Mein Dank geht an alle, die auf Irrtümer in der ersten Auflage hingewiesen haben, insbesondere an Gabriele Preissler, die zudem einige der zusätzlichen Bilder erstellt hat. Schließlich sei an dieser Stelle noch die englische Übersetzung erwähnt, die inzwischen von der American Mathematical Society in der Reihe *Student Mathematical Library* als Vol. 16 veröffentlicht wurde.

Stuttgart, im Januar 2003

*W. Kühnel*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Bezeichnungen sowie Hilfsmittel aus der Analysis</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Kurven im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>5</b>
2A	Frenet–Kurven im $\mathbb{R}^n$	5
2B	Ebene Kurven und Raumkurven	10
2C	Bedingungen an Krümmung und Torsion	14
2D	Die Frenet–Gleichungen und der Hauptsatz der lokalen Kurventheorie	18
2E	Kurven im Minkowski–Raum $\mathbb{R}_1^3$	23
2F	Globale Kurventheorie	25
<b>3</b>	<b>Lokale Flächentheorie</b>	<b>37</b>
3A	Flächenstücke, erste Fundamentalform	37
3B	Die Gauß–Abbildung und Krümmungen von Flächen	44
3C	Drehflächen und Regelflächen	52
3D	Minimalflächen	66
3E	Flächen im Minkowski–Raum $\mathbb{R}_1^3$	78
3F	Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$	84
<b>4</b>	<b>Die innere Geometrie von Flächen</b>	<b>91</b>
4A	Die kovariante Ableitung	92
4B	Parallelverschiebung und Geodätische	96
4C	Die Gauß–Gleichung und das Theorema Egregium	100
4D	Der Hauptsatz der lokalen Flächentheorie	105
4E	Die Gauß–Krümmung in speziellen Parametern	108
4F	Der Satz von Gauß–Bonnet	114
4G	Ausgewählte Kapitel der globalen Flächentheorie	124

---

<b>5 Riemannsche Mannigfaltigkeiten</b>	<b>136</b>
5A Der Mannigfaltigkeitsbegriff .....	137
5B Der Tangentialraum .....	141
5C Riemannsche Metriken .....	146
5D Der Riemannsche Zusammenhang .....	150
<b>6 Der Krümmungstensor</b>	<b>161</b>
6A Tensoren .....	161
6B Die Schnittkrümmung .....	167
6C Der Ricci-Tensor und der Einstein-Tensor .....	172
<b>7 Räume konstanter Krümmung</b>	<b>181</b>
7A Der hyperbolische Raum .....	181
7B Geodätische und Jacobi-Felder .....	188
7C Das Raumformen-Problem .....	199
7D Dreidimensionale euklidische und sphärische Raumformen .....	203
<b>8 Einstein-Räume</b>	<b>213</b>
8A Die Variation des Hilbert-Einstein-Funktional .....	215
8B Die Einsteinschen Feldgleichungen .....	221
8C Homogene Einstein-Räume .....	225
8D Die Zerlegung des Krümmungstensors .....	228
8E Die Konformkrümmung .....	236
8F Dualität für 4-Mannigfaltigkeiten, Petrov-Typen .....	242
<b>Literatur</b> .....	<b>250</b>
<b>Verzeichnis mathematischer Symbole</b> .....	<b>251</b>
<b>Index</b> .....	<b>252</b>