

**Bernd Luderer, Uwe Würker**

# **Einstieg in die Wirtschaftsmathematik**

4., durchgesehene Auflage



B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme  
Ein Titeldatensatz für diese Publikation ist bei  
der Deutschen Bibliothek erhältlich.

**Prof. Dr. rer. nat. habil. Bernd Luderer**

Geboren 1949 in Chemnitz. Von 1967 bis 1972 Studium der Mathematik, 1972 Diplom an der TH Karl-Marx-Stadt. Von 1972 bis 1975 Aspirantur, 1976 Promotion an der Lomonossow-Universität Moskau. 1975 wiss. Assistent, 1979 Oberassistent TH Karl-Marx-Stadt. Studienaufenthalte 1980 Banachzentrum Warschau, 1983 Lomonossow-Universität Moskau. 1988 Habilitation, 1989 Dozent, 1992 Professor TU Chemnitz.

**Dr. rer. nat. Uwe Würker**

Geboren 1963 in Glauchau/Sa. Von 1982 bis 1987 Studium der Mathematik, 1987 Diplom an der TU Karl-Marx-Stadt. Von 1987 bis 1990 Forschungsstudium, 1991 Promotion, 1990 wiss. Assistent an der TU Chemnitz.

1. Auflage 1995
2. Auflage 1997
- 3., durchges. Auflage 1999
- 4., durchges. Auflage November 2001

Alle Rechte vorbehalten

© B. G. Teubner GmbH, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2001

Der Verlag Teubner ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer.



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

[www.teubner.de](http://www.teubner.de)

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, [www.CorporateDesignGroup.de](http://www.CorporateDesignGroup.de)

ISBN 978-3-519-32098-2      ISBN 978-3-322-92728-6 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-322-92728-6

Für Ludmila und Swetlana

Für meine Eltern

# Vorwort zur 4. Auflage

Mathematik als propädeutisches Fach am Beginn eines wirtschaftswissenschaftlichen Studiums: Was soll gelehrt werden? Wie soll gelehrt werden? Wie umfangreich darf oder muß der Inhalt sein? So viele Personen, so viele Meinungen wird es dazu geben. Bei der Konzeption des vorliegenden Buches und somit bei der Beantwortung der aufgeworfenen Fragen sind wir von unseren langjährigen Lehrerfahrungen im Fach Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler an der Technischen Universität Chemnitz ausgegangen und zu folgenden, in diesem Lehrbuch realisierten Positionen gekommen:

- **Mathematik muß verständlich, aber korrekt gelehrt werden.** Will heißen: Im Vordergrund steht der „Normalfall“ einer Formel, eines Algorithmus, einer mathematischen Aussage; Sonderfälle, Entartungen, notwendige Voraussetzungen werden besprochen, aber nicht in den Vordergrund geschoben.

- **Ein Wirtschaftswissenschaftler soll Mathematik anwenden.** Will heißen: Er muß wissen, was Mathematik ist und kann. Er muß wichtige mathematische Begriffe kennen und sicher beherrschen. Er muß fundamentale Lösungsmethoden kennen und an kleinen Beispielen ausprobiert haben, um deren wichtigste Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten nutzen und ihre Grenzen einschätzen zu können. Er muß gewisse Fertigkeiten im Umgang mit der Mathematik als „Handwerkszeug“ für wirtschaftswissenschaftliche Untersuchungen erwerben. Er soll aber nicht unbedingt die mathematische Theorie weiterentwickeln. Deshalb stehen auch die Demonstration mathematischer Aussagen an Beispielen im Vordergrund, während Beweise sehr kurz wegkommen und nur exemplarischen Einblick in mathematische Denkweisen gewähren. Ein Wirtschaftswissenschaftler muß sich aber dessen bewußt sein, daß man Mathematik niemals bedenkenlos anwenden darf, daß man — wie in jeder Wissenschaft — an bestimmte Gültigkeitsvoraussetzungen gebunden ist.

- **Die Anwendung mathematischer Methoden in Wirtschaftswissenschaft und -praxis geht vom Wirtschaftswissenschaftler aus.** Will heißen: Der zukünftige Absolvent muß neben profunder Kenntnis seines Faches und grundlegenden Kenntnissen in Mathematik in der Lage sein, ökonomische Probleme in der Sprache der Mathematik zu formulieren, er muß abschätzen können, inwieweit die Mathematik zur Lösung oder Lösungsunterstützung des betreffenden Problems beitragen kann, und er muß die mittels mathematischer Methoden erhaltenen Resultate ökonomisch interpretieren und umsetzen können. In der Praxis wird er hierbei natürlich vom Mathematiker nicht im Stich gelassen. Diesem Ziel dienen im Buch die Untersuchung der vielfältigsten wirtschaftswissenschaftlichen Fragestellungen und ihre Umsetzung in mathematische Formulierungen — kurzum, die Modellierung komplexer Sachverhalte.

- **Ein Wirtschaftswissenschaftler sollte von der Wichtigkeit der Mathematik überzeugt sein.** Will heißen: Er muß sehen, wo und wie ihm

mathematische Lösungsmethoden bei der Untersuchung der ihn interessierenden Fragen helfen können. Dieses Anliegen wird im Buch dadurch realisiert, daß die behandelten mathematischen Themen an vielen Anwendungsbeispielen illustriert werden und daß großer Wert auf die Interpretation der erzielten Ergebnisse gelegt wird.

Die Darlegungen des Buches berücksichtigen natürlich, daß ein Student im 1. Semester noch kein fertig ausgebildeter Wirtschaftswissenschaftler ist. Deshalb werden sehr spezielle Fachtermini vermieden. Zur Anregung der selbständigen Beschäftigung mit dem behandelten Stoff werden dafür eine große Zahl an Übungsaufgaben gestellt, von denen in der Regel auch die Lösungen im Anhang zu finden sind. Schließlich ist die Vielzahl im Buch enthaltener Abbildungen dazu gedacht, das Vorstellungsvermögen anzuregen und zu verbessern.

Das vorliegende Lehrbuch vereint gewissermaßen **drei Bücher in einem**: einen **Vorkurs** zum Erwerb oder zur Festigung von Abiturkenntnissen, den eigentlichen **Grundkurs** Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, der die Gebiete Lineare Algebra, Lineare Optimierung und Analysis mehrerer Veränderlicher umfaßt, sowie eine relativ umfangreiche Einführung in die **Finanzmathematik**. Nicht unerwähnt sollte bleiben, daß das Buch so angelegt ist, daß es sich auch vorzüglich zum Selbststudium eignet.

Gegenüber der vorhergehenden Auflage gibt es keine inhaltlichen Änderungen, jedoch haben wir das gesamte Buch wiederum einer kritischen Durchsicht unterzogen.

Den Wünschen vieler Studenten folgend, wurde das vorliegende Lehrbuch ergänzt durch eine umfangreiche Aufgabensammlung (mit zahlreichen Beispielen, Hinweisen und Lösungen), ein etwas kürzer gehaltenes Buch zur Klausurvorbereitung sowie eine Formelsammlung:

Luderer, B., Paape, C. und Würker U.: Arbeits- und Übungsbuch Wirtschaftsmathematik, Beispiele – Aufgaben – Formeln (2. Auflage), Teubner, Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden 2001,

Luderer, B.: Klausurtraining Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Teubner, Stuttgart · Leipzig 1997,

Luderer, B., Nollau, V., und Veters, K.: Mathematische Formeln für Wirtschaftswissenschaftler (3. Auflage), Teubner, Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden 2000.

Wir hoffen auf weitere positive Aufnahme des Lehrbuches durch die Leser und sind für konstruktive Hinweise und Anregungen, die zu seiner Verbesserung beitragen, dankbar.

Bernd Luderer, Uwe Würker

Chemnitz, August 2001

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>5</b>
<b>Zeichenerklärung</b>	<b>12</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>13</b>
1.1 Instrumente der Elementarmathematik . . . . .	13
1.1.1 Zahlbereiche. Zahlendarstellung . . . . .	13
1.1.2 Rechnen mit Zahlen . . . . .	15
1.1.3 Bruchrechnung . . . . .	18
1.1.4 Potenzrechnung . . . . .	20
1.1.5 Binomische Formeln. Partialdivision . . . . .	22
1.1.6 Wurzelrechnung . . . . .	26
1.1.7 Logarithmenrechnung . . . . .	27
1.1.8 Rechenregeln und Auflösung von Gleichungen . . . . .	29
1.1.9 Koordinatensysteme . . . . .	33
1.1.10 Winkelbeziehungen . . . . .	35
1.1.11 Komplexe Zahlen . . . . .	36
1.2 Darstellung von Funktionen einer Variablen . . . . .	38
1.2.1 Formen der Darstellung . . . . .	40
1.2.2 Operationen mit Funktionen . . . . .	41
1.2.3 Wichtige spezielle Funktionen . . . . .	44
1.3 Ergänzende Fragen . . . . .	57
1.3.1 Intervalle . . . . .	57
1.3.2 Auflösung von Ungleichungen . . . . .	58
1.3.3 Absolute Beträge . . . . .	60
1.4 Analytische Geometrie . . . . .	62
1.4.1 Geradengleichungen in der Ebene . . . . .	62
1.4.2 Geraden und Ebenen im Raum . . . . .	67
1.4.3 Graphische Darstellung von Ungleichungssystemen . . . . .	69
1.5 Zahlenfolgen und Zahlenreihen . . . . .	71
1.5.1 Grundbegriffe . . . . .	71
1.5.2 Arithmetische Folgen und Reihen . . . . .	72
1.5.3 Geometrische Folgen und Reihen . . . . .	73

<b>2</b>	<b>Logik und Mengenlehre</b>	<b>75</b>
2.1	Aussagenlogik . . . . .	75
2.1.1	Aussagen . . . . .	75
2.1.2	Aussagenverbindungen . . . . .	77
2.1.3	Quantoren . . . . .	80
2.1.4	Einfache Schlußweisen . . . . .	81
2.2	Mengenlehre . . . . .	83
2.2.1	Grundbegriffe . . . . .	83
2.2.2	Mengenrelationen . . . . .	85
2.2.3	Mengenoperationen . . . . .	86
2.2.4	Abbildungen und Funktionen . . . . .	88
<b>3</b>	<b>Finanzmathematik</b>	<b>92</b>
3.1	Zins- und Zinseszinsrechnung . . . . .	92
3.1.1	Einfache Verzinsung . . . . .	93
3.1.2	Zinseszinsrechnung . . . . .	96
3.1.3	Grundaufgaben der Zinseszinsrechnung . . . . .	97
3.1.4	Kapitalwertmethode . . . . .	99
3.1.5	Gemischte Verzinsung . . . . .	100
3.1.6	Unterjährige Verzinsung . . . . .	102
3.2	Rentenrechnung . . . . .	104
3.2.1	Grundbegriffe der Rentenrechnung . . . . .	104
3.2.2	Vorschüssige Renten . . . . .	105
3.2.3	Nachschüssige Renten . . . . .	106
3.2.4	Grundaufgaben der Rentenrechnung . . . . .	108
3.2.5	Ewige Rente . . . . .	109
3.3	Tilgungsrechnung . . . . .	111
3.3.1	Grundbegriffe. Formen der Tilgung . . . . .	111
3.3.2	Ratentilgung . . . . .	112
3.3.3	Annuitätentilgung . . . . .	113
3.3.4	Tilgungspläne . . . . .	115
3.4	Renditerechnung . . . . .	116
<b>4</b>	<b>Lineare Algebra</b>	<b>121</b>
4.1	Matrizen, Vektoren, Vektorräume . . . . .	121
4.1.1	Begriff der Matrix . . . . .	121
4.1.2	Spezielle Matrizen . . . . .	122
4.1.3	Matrizenrelationen . . . . .	125
4.1.4	Operationen mit Matrizen . . . . .	126
4.2	Matrizenmultiplikation . . . . .	130
4.2.1	Skalarprodukt . . . . .	130

4.2.2	Produkt von Matrizen . . . . .	131
4.2.3	Eigenschaften der Matrizenmultiplikation . . . . .	133
4.2.4	Anwendungen der Matrizenmultiplikation . . . . .	134
4.3	Lineare Gleichungssysteme (LGS) . . . . .	141
4.3.1	Begriff des linearen Gleichungssystems . . . . .	141
4.3.2	Darstellungsformen von LGS . . . . .	142
4.3.3	Begriff der Lösung eines LGS . . . . .	144
4.3.4	Lineare Gleichungssysteme mit Einheitsmatrix . . . . .	146
4.3.5	Elementare Umformungen eines LGS . . . . .	148
4.4	Gaußscher Algorithmus . . . . .	148
4.4.1	Anwendung elementarer Umformungen . . . . .	149
4.4.2	Ablaufplan des Gaußschen Algorithmus . . . . .	152
4.4.3	Lösungsdarstellung . . . . .	153
4.4.4	Numerische Aspekte . . . . .	155
4.4.5	Zusammenfassende Bemerkungen . . . . .	156
4.5	Lineare Unabhängigkeit . . . . .	158
4.5.1	Linearkombination . . . . .	159
4.5.2	Begriff der linearen Unabhängigkeit . . . . .	161
4.5.3	Basis und Rang . . . . .	164
4.5.4	Zur Lösungsstruktur linearer Gleichungssysteme . . . . .	167
4.6	Matrizeninversion . . . . .	169
4.6.1	Definition der inversen Matrix . . . . .	169
4.6.2	Anwendungen der Matrizeninversion . . . . .	172
4.7	Determinanten . . . . .	177
4.7.1	Definition der Determinante . . . . .	177
4.7.2	Eigenschaften von Determinanten . . . . .	180
4.7.3	Anwendungen der Determinantenrechnung . . . . .	183
4.7.4	Definitheit von Matrizen . . . . .	185
4.7.5	Zusammenfassende Bemerkungen . . . . .	187
<b>5</b>	<b>Lineare Optimierung</b> . . . . .	<b>189</b>
5.1	Gegenstand der Linearen Optimierung . . . . .	190
5.1.1	Betrachtung einer Modellsituation . . . . .	191
5.1.2	Bestandteile einer LOA. Lösungsbegriff . . . . .	192
5.2	Modellierung und graphische Lösung von LOA . . . . .	194
5.2.1	Modellierung typischer Problemstellungen . . . . .	195
5.2.2	Graphische Lösung von LOA . . . . .	201
5.3	Theorie der Linearen Optimierung . . . . .	211
5.3.1	Überführung in die Gleichungsform . . . . .	211
5.3.2	Basislösungen und Eckpunkte . . . . .	216



5.3.3	Eigenschaften von LOA . . . . .	219
5.4	Simplexmethode für Optimierungsaufgaben in Gleichungsform . . . . .	220
5.4.1	Grundidee . . . . .	220
5.4.2	Auswahl der aufzunehmenden Basisvariablen . . . . .	223
5.4.3	Auswahl der auszuschließenden Basisvariablen . . . . .	225
5.4.4	Ablaufplan des Simplexalgorithmus . . . . .	227
5.4.5	Beispiele. Rechenkontrollen . . . . .	230
5.4.6	Sonderfälle . . . . .	234
5.5	Zwei-Phasen-Methode . . . . .	237
5.5.1	Grundidee . . . . .	238
5.5.2	Mögliche Fälle . . . . .	239
5.5.3	Beispiele . . . . .	241
5.6	Dualität in der Linearen Optimierung . . . . .	243
5.6.1	Konstruktion der dualen Aufgabe . . . . .	244
5.6.2	Dualitätsbeziehungen . . . . .	246
5.6.3	Ökonomische Interpretation der Dualvariablen . . . . .	249
<b>6</b>	<b>Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen</b>	<b>255</b>
6.1	Grenzwert und Stetigkeit . . . . .	255
6.1.1	Grenzwerte von Zahlenfolgen . . . . .	256
6.1.2	Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen . . . . .	259
6.1.3	Stetigkeit . . . . .	261
6.1.4	Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	263
6.2	Differenzen- und Differentialquotient . . . . .	264
6.2.1	Der Begriff des Differentialquotienten . . . . .	266
6.2.2	Differential . . . . .	269
6.2.3	Differentiationsregeln. Höhere Ableitungen . . . . .	270
6.3	Charakterisierung von Funktionen mittels Ableitungen . . . . .	274
6.3.1	Monotonie und Beschränktheit . . . . .	274
6.3.2	Extremwerte . . . . .	277
6.3.3	Wendepunkte. Krümmungsverhalten . . . . .	281
6.3.4	Kurvendiskussion . . . . .	285
6.3.5	Beispiele zur Kurvendiskussion . . . . .	287
6.3.6	Anwendungen in der Marginalanalyse . . . . .	291
6.4	Numerische Methoden der Nullstellenberechnung . . . . .	297
6.4.1	Intervallhalbierung . . . . .	298
6.4.2	Sekantenverfahren. Regula falsi . . . . .	300
6.4.3	Newtonverfahren . . . . .	301

<b>7 Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>303</b>
7.1 Begriff und Beispiele	303
7.1.1 Funktionsbegriff	303
7.1.2 Beispiele für Funktionen mehrerer Veränderlicher	305
7.2 Grenzwert und Stetigkeit	308
7.3 Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlicher	314
7.3.1 Begriff der Differenzierbarkeit	314
7.3.2 Partielle Ableitungen und Elastizitäten	315
7.3.3 Gradient einer Funktion. Verschiedene Interpretationen	319
7.3.4 Partielle Ableitungen höherer Ordnung. Hessian	323
7.3.5 Vollständiges Differential	324
7.3.6 Implizite Funktionen	326
<b>8 Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>331</b>
8.1 Extremwerte ohne Nebenbedingungen	331
8.1.1 Notwendige und hinreichende Extremwertbedingungen	332
8.1.2 Beispiele	336
8.2 Extremwerte unter Nebenbedingungen	338
8.2.1 Allgemeine Aufgabenformulierung	339
8.2.2 Die Eliminationsmethode	340
8.2.3 Lagrange-Methode	346
8.2.4 Interpretation der Lagrangeschen Multiplikatoren	354
8.3 Methode der kleinsten Quadrate	355
8.3.1 Problemstellung. Lineare Regression	355
8.3.2 Allgemeinere Ansatzfunktionen	362
<b>9 Integralrechnung</b>	<b>365</b>
9.1 Das unbestimmte Integral	366
9.1.1 Integration von Funktionen einer Veränderlichen	366
9.1.2 Integrationsregeln	367
9.2 Das bestimmte Integral	369
9.2.1 Integralbegriff für Funktionen einer Variablen	369
9.2.2 Integrierbarkeit. Eigenschaften bestimmter Integrale	371
9.2.3 Numerische Integration	373
9.2.4 Uneigentliche Integrale	376
9.2.5 Doppelintegral	378
9.3 Anwendungen der Integralrechnung	380
<b>A Lösungen zu den Aufgaben</b>	<b>384</b>
<b>B Klausurbeispiel</b>	<b>403</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>409</b>
<b>Sachverzeichnis</b>	<b>410</b>