

Helmut Fischer, Helmut Kaul

Mathematik für Physiker Band 1 Grundkurs

4., überarbeitete Auflage



Teubner

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme
Ein Titeldatensatz für diese Publikation ist bei
der Deutschen Bibliothek erhältlich.

Dr. rer. nat. Helmut Fischer

Geboren 1936 in Wuppertal. Ab 1955 Studium der Mathematik und Physik U Tübingen bei E. Kamke, H. Wieland und W. Braunbek. Von 1962 bis 1964 im Rechenzentrum bei H. Wieland. Seit 1969 Akad. Rat/Oberrat am Mathematischen Institut U Tübingen.

Prof. Dr. rer. nat. Helmut Kaul

Geboren 1936 in Gleiwitz. Von 1958 bis 1965 Studium der Mathematik und Physik U Göttingen und FU Berlin bei H. Grauert, K. P. Grotemeyer, W. Klingenberg und S. Hildebrandt. 1970 Promotion U Mainz. Von 1971 bis 1977 Assistententätigkeit und 1976 Habilitation U Bonn, 1977 Wiss. Rat und Professor GHS Duisburg, seit 1978 Professor U Tübingen.

1. Auflage 1988
2. Auflage 1990
- 3., überarb. Auflage 1997
- 4., überarb. Auflage November 2001

Alle Rechte vorbehalten

© B. G. Teubner GmbH, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2001

Der Verlag Teubner ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer.



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

www.teubner.de

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

ISBN 978-3-519-32079-1 ISBN 978-3-322-92727-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-92727-9

Vorwort

Bei unseren Mathematikvorlesungen für Physiker stellten wir immer wieder fest, daß es zwar eine Fülle vorzüglicher Einzeldarstellungen der verschiedenen mathematischen Teilgebiete gibt, daß aber eine auf naturwissenschaftliche Fragestellungen zugeschnittene Zusammenfassung bisher fehlte.

Mit diesem ersten von insgesamt drei Bänden wollen wir dem Physiker eine integrierte Darstellung der für ihn wichtigsten mathematischen Grundlagen, wie sie üblicherweise im Grundstudium behandelt werden, an die Hand geben.

Im zweiten Band behandeln wir gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen und Operatoren der Quantenmechanik. Der dritte Band ist der Variationsrechnung, der Differentialgeometrie und den mathematischen Grundlagen der Relativitätstheorie gewidmet.

Beim Aufbau des ersten Bandes war zu berücksichtigen, daß der Differential- und Integralkalkül bis hin zur Schwingungsgleichung sowie die Vektorrechnung möglichst früh bereitgestellt werden müssen. Schon deswegen verbot sich eine Gliederung nach getrennten mathematischen Einzeldisziplinen. Darüberhinaus sind wir nach dem Prinzip verfahren, Lösungsmethoden gleich dort vorzustellen, wo die entsprechenden Hilfsmittel bereitstehen. Dies gilt insbesondere für Differentialgleichungen.

Wegen der Fülle des zu behandelnden Stoffs fiel uns die gezielte Auswahl nicht leicht, und wir mußten schweren Herzens auf viele schöne Anwendungen, Beispiele und historische Anmerkungen verzichten.

Es sollen hier nicht in erster Linie fertige Lösungsverfahren vermittelt werden, wichtiger — und übrigens oft leichter zu merken — ist der Weg dorthin. Erst wer sich die dabei auftretenden Probleme bewußt gemacht hat kann deren Lösung würdigen. Oft ist mit der Klärung einer mathematischen Schwierigkeit auch eine physikalische Einsicht verbunden. Dem Problembewußtsein sollen die eingestreuten historischen Bemerkungen sowie die Gegenbeispiele und „pathologischen“ Fälle dienen, vor allem aber auch die Beweise.

Für die zunehmend anspruchsvollen Theorien der Physik bedarf es neben der unerläßlichen Intuition auch der Sicherheit im Umgang mit der Mathematik. Deshalb werden im ersten Teil die meisten Beweise ausgeführt. Erst später gehen wir dazu über, in Einzelfällen auf die Literatur zu verweisen, insbesondere bei technisch schwierigen Beweisen, wenn diese keine besonderen Einsichten vermitteln.

Wenn wir an manchen Stellen nicht volle Allgemeinheit anstrebten, sondern uns auf typische Fälle beschränkt haben, so geschah dies in der Erwartung, daß der Leser analoge Fälle durch Übertragung der gelernten Methoden selbst bewältigen kann.

Durch den Anklang, den die bisherigen Auflagen fanden, fühlen wir uns in dem eingeschlagenen Weg bestätigt. Weniger zufrieden waren wir über eine Reihe von Druckfehlern und einige sachliche Unstimmigkeiten, von denen auch die dritte Auflage nicht frei war. Da sich im praktischen Einsatz zeigte, daß einige Passagen noch nicht klar und verständlich genug formuliert waren, haben wir eine weitere gründliche Überarbeitung vorgenommen.

Wir danken allen, die uns durch Verbesserungsvorschläge, Hinweise auf Fehler und kritische Anmerkungen unterstützt haben. Insbesondere danken wir den Herren Ralph Hungerbühler, Harald König und Thomas Träuble für die drucktechnische Gestaltung mit Hilfe von \LaTeX und ihre Mithilfe beim Korrigieren der beiden ersten Auflagen. Unserer ganz besonderer Dank gilt Herrn Hungerbühler für die Korrektur und den Druck aller Auflagen. Ohne seinen Einsatz, seine Geduld und sein Verständnis für die Wünsche und Nöte der Autoren hätte dieses Buch weder entstehen noch neu bearbeitet werden können.

Tübingen, September 2001

H. Fischer, H. Kaul

Zum Gebrauch

Gegliedert wurde nach Paragraphen, Abschnitten und Unterabschnitten. Mit dem Zitat § 9: 4.2 wird Abschnitt 4, Unterabschnitt 2 in Paragraph 9 aufgerufen; innerhalb von § 9 wird die betreffende Stelle einfach mit 4.2 zitiert. Nummer und Überschrift des gerade anstehenden Paragraphen und Abschnittes befinden sich in der Kopfzeile.

Durch das Symbol $\overline{\text{ÜA}}$ (Übungsaufgabe) wird der Leser aufgefordert, einfache Rechnungen, Beweisschritte und Übungsbeispiele selbst auszuführen.

Mit einem * sind solche Abschnitte markiert, die zwar inhaltlich an die betreffende Stelle gehören, bei der ersten Lektüre aber übergangen werden können.

Der Namensindex enthält die Lebensdaten der in den historischen Anmerkungen erwähnten Personen. Ein Verzeichnis der Symbole und Abkürzungen befindet sich vor dem Index am Ende des Buches.

Wegweiser

Der Leser muß sich nicht streng an die hier gewählte Reihenfolge halten. Wer beispielsweise einen schnellen Zugang zur Differential- und Integralrechnung sucht, kann die Paragraphen 4–7 zunächst übergangen. Die Lineare Algebra setzt im wesentlichen nur die Paragraphen 1, 2 und 5 voraus. Für die Funktionentheorie sind nur ganz wenige Begriffe aus den Kapiteln IV, V und VI erforderlich. Die Paragraphen 4, 6 und 13 gehen in den übrigen Stoff nicht wesentlich ein.

Inhalt

Kapitel I Grundlagen

§ 1 Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen

1	Vorläufiges über Mengen und Aussagen	11
2	Vorläufiges über die reellen Zahlen	13
3	Rechengesetze für reelle Zahlen	14
4	Das Rechnen in \mathbb{Q} , \mathbb{Z} und \mathbb{N}	14
5	Die Anordnung der reellen Zahlen	15
6	Vollständige Induktion	19
7	Intervalle	23
8	Beschränkte Mengen, obere und untere Schranken	24
9	Maximum und Minimum	25
10	Archimedische Anordnung von \mathbb{Q}	26
11	Die Abzählbarkeit von \mathbb{Q}	26
12	Die Lückenhaftigkeit von \mathbb{Q}	27

§ 2 Die Vollständigkeit von \mathbb{R} , konvergente Folgen

1	Supremum und Infimum	28
2	Folgerungen aus dem Supremumsaxiom	29
3	Folgen, Rekursion, Teilfolgen	32
4	Nullfolgen	33
5	Sätze über Nullfolgen	37
6	Grenzwerte von Folgen	38
7	Existenz der m -ten Wurzel, rationale Potenzen	42
8	Intervallschachtelungen	43
9	Grenzwertfreie Konvergenzkriterien	46

§ 3 Elementare Funktionen

1	Die Folge $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$	50
2	Die Exponentialfunktion	52
3	Funktionen (Abbildungen)	55
4	Die Logarithmusfunktion	58
5	Die allgemeine Potenz und der Zehnerlogarithmus	59
6	Zusammengesetzte Funktionen	60
7	Polynome und rationale Funktionen	61
8	Die trigonometrischen Funktionen	67

§ 4 Mengen und Wahrscheinlichkeit

1	Einfache Mengenalgebra	74
2	Exkurs über logisches Schließen und Beweistechnik	76
3	Notwendige und hinreichende Bedingungen	78
4	Beliebige Vereinigungen und Durchschnitte	78

5	Beispiele zur Wahrscheinlichkeit	79
6	Das mathematische Modell endlicher Zufallsexperimente	81
7	Das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	84
8	Kombinatorische Grundformeln (Teil I)	86
9	Binomialkoeffizienten und Binomialverteilung	91
*10	Kombinatorische Grundformeln (Teil II)	96

Kapitel II Vektorrechnung im \mathbb{R}^n

§ 5 Vektorrechnung im \mathbb{R}^2 , komplexe Zahlen

1	Vektorielle Größen in der Physik	98
2	Vektoren in der ebenen Geometrie	98
3	Koordinatendarstellung von Punkten und Vektoren	102
4	Punkte und Vektoren	105
5	Geraden und Strecken, Schnitt zweier Geraden	106
6	Lineare 2×2 -Gleichungssysteme	108
7	Abstand, Norm, Winkel, ebene Drehungen	109
8	Die komplexen Zahlen	112
9	Die komplexe Exponentialfunktion	118
10	Der Fundamentalsatz der Algebra, Beispiele	119
11	Drehungen und Spiegelungen in komplexer Schreibweise	122

§ 6 Vektorrechnung im \mathbb{R}^n

1	Der Vektorraum \mathbb{R}^n	124
2	Skalarprodukt, Längen, Winkel	126
3	Das Vektorprodukt im \mathbb{R}^3	130
4	Entwicklung nach Orthonormalsystemen, Orthonormalbasen	135
5	Aufgaben	137

Kapitel III Analysis einer Veränderlichen

§ 7 Unendliche Reihen

1	Reihen im Reellen	139
2	Konvergenzkriterien für Reihen	143
3	Komplexe Folgen, Vollständigkeit von \mathbb{C}	146
4	Reihen mit komplexen Gliedern	148
5	Cauchy-Kriterium und Majorantenkriterium	150
6	Umordnung von Reihen	152
7	Das Cauchy-Produkt	156

§ 8 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

1	Grenzwerte von Funktionen	157
2	Stetigkeit	163
3	Stetigkeit zusammengesetzter Funktionen	164
4	Die Hauptsätze über stetige Funktionen	166
5	Die Stetigkeit der Umkehrfunktion	170

*6	Der Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit	171
§ 9	Differentialrechnung	
1	Vorbemerkungen	173
2	Differenzierbarkeit und Ableitung	175
3	Differentiation zusammengesetzter Funktionen	178
4	Mittelwertsätze und Folgerungen	181
5	Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion und Beispiele	183
6	Höhere Ableitungen und C^n -Funktionen	185
7	Taylorentwicklung	187
8	Lokale Minima und Maxima	191
9	Bestimmung von Grenzwerten nach de l'Hospital	193
§ 10	Reihenentwicklungen und Schwingungen	
1	Taylorreihen	195
2	Potenzreihen	201
3	Gliedweise Differenzierbarkeit und Identitätssatz	204
4	Theorie der Schwingungsgleichung	206
5	Lösung der Schwingungsgleichung durch komplexen Ansatz	211
§ 11	Integralrechnung	
1	Treppenfunktionen und ihr Integral	215
2	Der gleichmäßige Abstand zweier beschränkter Funktionen	218
3	Integrierbare Funktionen und Eigenschaften des Integrals	220
4	Zwei wichtige Klassen integrierbarer Funktionen	223
5	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	225
6	Partielle Integration	229
7	Die Substitutionsregel	232
8	Integration rationaler Funktionen	236
9	Integrale mit Potenzen von $\sqrt{x^2 + \alpha x + \beta}$	241
10	Übergang zum halben Winkel	243
11	Schlußbemerkungen	244
§ 12	Vertauschung von Grenzprozessen, uneigentliche Integrale	
1	Problemstellungen, Beispiele	246
2	Gleichmäßige Konvergenz von Folgen und Reihen	247
3	Vertauschung von Grenzübergängen	252
4	Uneigentliche Integrale	256
5	Substitution und partielle Integration, Gamma-Funktion	261
§ 13	Elementar integrierbare Differentialgleichungen	
1	Die lineare Differentialgleichung $y' = a(x)y + b(x)$	266
2	Zwei aufschlußreiche Beispiele	271
3	Die separierte Differentialgleichung $y' = a(x) \cdot b(y)$	273
4	Zurückführung auf getrennte Variable	280
5	Wegweiser: Differentialgleichungen in Band 1 und Band 2	281

Kapitel IV Lineare Algebra**§ 14 Vektorräume**

1 Wovon handelt die lineare Algebra?	282
2 Vektorräume	284
3 Teilräume	287
4 Linearkombinationen, lineare Hülle, Erzeugendensystem	289
5 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit	290
6 Vektorräume mit Basis	292

§ 15 Lineare Abbildungen und Matrizen

1 Beispiele linearer Abbildungen	297
2 Die Dimensionsformel	299
3 Verknüpfung linearer Abbildungen	301
4 Lineare Abbildungen und Matrizen	301
5 Matrizenrechnung	305
6 Invertierbare lineare Abbildungen und reguläre Matrizen	309
7 Basiswechsel und Koordinatentransformation	311

§ 16 Lineare Gleichungen

1 Problemstellungen und Beispiele	313
2 Allgemeines zur Lösbarkeit und zur Lösungsmenge	314
3 Rangbedingungen	315
4 Das Eliminationsverfahren für lineare Gleichungssysteme	317
5 Interpolation und numerische Quadratur	322
6 Die Methode der kleinsten Quadrate	325

§ 17 Determinanten

1 Beispiele	327
2 Die Definition der Determinante	329
3 Die Eigenschaften der Determinante	334
4 Das Volumen von Parallelepipeden	338
*5 Orientierung und Determinante	341

§ 18 Eigenwerte und Eigenvektoren

1 Diagonalisierbarkeit und Eigenwertproblem	342
2 Eigenwerte und Eigenvektoren	344
3 Das charakteristische Polynom	346
4 Diagonalisierbarkeit von Operatoren	348
5 Entkopplung von Systemen linearer Differentialgleichungen	351

§ 19 Skalarprodukte, Orthonormalsysteme und unitäre Gruppen

1 Skalarprodukträume	353
2 Orthonormalsysteme und orthogonale Projektionen	356
3 Das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt	360
4 Unitäre Abbildungen und Matrizen	362
5 Matrix- und Transformationsgruppen	367

§ 20 Symmetrische Operatoren und quadratische Formen

1	Quadratische Formen	372
2	Symmetrische Operatoren und quadratische Formen	374
3	Die Diagonalisierbarkeit symmetrischer Operatoren	376
4	Hauptachsentransformation quadratischer Formen	378
5	Gekoppelte Systeme von Massenpunkten	382

Kapitel V Analysis mehrerer Variabler**§ 21 Topologische Grundbegriffe normierter Räume**

1	Normierte Räume	386
2	Konvergente Folgen	388
3	Offene und abgeschlossene Mengen	389
4	Inneres, Äußeres, Abschluß und Rand einer Menge	392
5	Vollständigkeit	394
6	Kompakte Teilmengen	395
7	Stetige Funktionen	397
8	Stetige Funktionen auf kompakten Mengen	401
9	Zusammenhang, Gebiete	402

§ 22 Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

1	Differenzierbarkeit und Ableitung	404
2	Rechenregeln für differenzierbare Funktionen	412
3	Reellwertige Funktionen: Gradient, Richtungsableitung, Hauptsatz	416
4	Der Satz von Taylor	421
5	Der Umkehrsatz und der Satz über implizite Funktionen	426
6	Lokale Extrema unter Nebenbedingungen	436

§ 23 Integralrechnung im \mathbb{R}^n

1	Das Integral für Treppenfunktionen	440
2	Integration stetiger Funktionen über kompakte Quader	444
3	Das Volumen von Rotationskörpern	448
4	Das Integral stetiger Funktionen über offene Mengen	449
5	Parameterintegrale über offene Mengen	454
6	Sukzessive Integration	456
7	Das n -dimensionale Volumen	460
8	Der Transformationssatz und Anwendungen	463

Kapitel VI Vektoranalysis**§ 24 Kurvenintegrale**

1	Kurvenstücke	468
2	Länge und Bogenlänge	470
3	Skalare Kurvenintegrale	473
4	Vektorielle Kurvenintegrale	474
5	Konservative Vektorfelder und Potentiale	478

*6	Kurvenintegrale und Potentiale in der Thermodynamik	487
7	Divergenz, Laplaceoperator, Rotation, Vektorpotentiale	489
§ 25	Oberflächenintegrale	
1	Flächenstücke im \mathbb{R}^3	491
2	Der Flächeninhalt von Flächenstücken	494
3	Oberflächenintegrale	498
§ 26	Die Integralsätze von Stokes, Gauß und Green	
1	Übersicht	502
2	Der Integralsatz von Stokes	503
3	Der Stokessche Integralsatz in der Ebene	513
4	Der Integralsatz von Gauß	517
5	Anwendungen des Gaußschen Satzes, Greensche Formeln	523
6	Anwendungen der Integralsätze in der Physik	525
Kapitel VII Einführung in die Funktionentheorie		
§ 27	Die Hauptsätze der Funktionentheorie	
1	Holomorphie und Cauchy–Riemannsche DGLn	531
2	Komplexe Kurvenintegrale und Stammfunktionen	535
3	Analytische Funktionen	542
4	Der Cauchysche Integralsatz	545
5	Die Cauchysche Integralformel und ihre Konsequenzen	547
6	Ganze Funktionen und Satz von Liouville	550
7	Der Satz von Morera und Folgerungen	552
8	Zusammenfassung der Hauptsätze	553
§ 28	Isolierte Singularitäten, Laurent–Reihen und Residuensatz	
1	Einteilung isolierter Singularitäten	554
2	Die Laurent–Entwicklung	555
3	Charakterisierung isolierter Singularitäten	560
4	Der Residuenkalkül	563
5	Der Residuensatz	565
6	Berechnung von Reihen mit Hilfe des Residuensatzes	565
7	Berechnung von Integralen mit Hilfe des Residuensatzes	568
Namen und Lebensdaten		571
Literaturverzeichnis		572
Symbole und Abkürzungen		574
Index		576