

# Teubner Studienbücher

## Physik/Chemie

- Becher/Böhm/Joos: **Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung**  
2. Aufl. DM 38,—
- Bourne/Kendall: **Vektoranalysis**. 2. Aufl. DM 26,80
- Daniel: **Beschleuniger**. DM 26,80
- Elschenbroich/Salzer: **Organometallchemie**. 2. Aufl. DM 46,—
- Engelke: **Aufbau der Moleküle**. DM 38,—
- Fischer/Kaul: **Mathematik für Physiker**  
Band 1: Grundkurs. DM 48,—
- Goetzberger/Wittwer: **Sonnenenergie**. DM 26,80
- Gross/Runge: **Vielteilchentheorie**. DM 38,—
- Großer: **Einführung in die Teilchenoptik**. DM 26,80
- Großmann: **Mathematischer Einführungskurs für die Physik**. 5. Aufl. DM 34,—
- Heil/Kitzka: **Grundkurs Theoretische Mechanik**. DM 39,—
- Heinloth: **Energie**. DM 42,—
- Kamke Krämer: **Physikalische Grundlagen der Maßeinheiten**. DM 23,80
- Kleinknecht: **Detektoren für Teilchenstrahlung**. 2. Aufl. DM 29,80
- Kneubühl: **Repetitorium der Physik**. 3. Aufl. DM 46,—
- Kneubühl/Sigrist: **Laser**. DM 42,—
- Kopitzki: **Einführung in die Festkörperphysik**. DM 36,—
- Kröger/Unbehauen: **Technische Elektrodynamik**. DM 39,80
- Kunze: **Physikalische Meßmethoden**. DM 26,80
- Lautz: **Elektromagnetische Felder**. 3. Aufl. DM 32,—
- Lindner: **Drehimpulse in der Quantenmechanik**. DM 26,80
- Lohrmann: **Einführung in die Elementarteilchenphysik**. DM 24,80
- Lohrmann: **Hochenergiephysik**. 3. Aufl. DM 34,—
- Mayer-Kuckuk: **Atomphysik**. 3. Aufl. DM 34,—
- Mayer-Kuckuk: **Kernphysik**. 4. Aufl. DM 38,—
- Mommsen: **Archäometrie**. DM 38,—
- Neuert: **Atomare Stoßprozesse**. DM 26,80
- Nolting: **Quantentheorie des Magnetismus**  
Teil 1: Grundlagen. DM 36,—  
Teil 2: Modelle. DM 36,—
- Primas/Müller-Herold: **Elementare Quantenchemie**. DM 39,—
- Raeder u. a.: **Kontrollierte Kernfusion**. DM 42,—
- Rohe: **Elektronik für Physiker**. 3. Aufl. DM 29,80
- Rohe/Kamke: **Digitalelektronik**. DM 26,80
- Schatz/Weidinger: **Nukleare Festkörperphysik**. DM 32,—
- Schmidt: **Meßelektronik in der Kernphysik**. DM 26,80

Fortsetzung auf der letzten Textseite

# **Mathematischer Einführungskurs für die Physik**

Von Dr. rer. nat. Siegfried Großmann  
Professor an der Universität Marburg

5., durchgesehene und erweiterte Auflage  
Mit 92 Figuren, 102 Beispielen  
und 201 Selbsttests mit Lösungen



B. G. Teubner Stuttgart 1988

Prof. Dr. rer. nat. Siegfried Großmann

1930 geb. in Quednau/Königsberg; 1952 1. Lehrprüfung an der P.H. Berlin; 1956 Staatsexamen an der Freien Universität Berlin, anschließend Schuldienst; 1958 Studienassessor; 1959–63 wissenschaftlicher Assistent in Theoretischer Physik; 1960 Promotion F.U. Berlin zum Dr. rer. nat.; 1962 Habilitation für Theoretische Physik an der F.U. Berlin; 1963 Konservator an der T.H. München; 1964 a.o. Professor an der Philipps-Universität Marburg; 1966 o. Professor für Theoretische Physik, Marburg.

Arbeitsgebiete: Statistische Physik, Mathematische Physik.

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek

**Grossmann, Siegfried:**

Mathematischer Einführungskurs für die Physik / von Siegfried Grossmann. – 5., durchges. u. erw. Aufl. – Stuttgart : Teubner, 1988

(Teubner-Studienbücher : Physik)

ISBN 978-3-519-43028-5

ISBN 978-3-322-92708-8 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-92708-8

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt besonders für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

© B. G. Teubner, Stuttgart 1988

Satz: Elsner & Behrens GmbH, Oftersheim

Umschlaggestaltung: W. Koch, Sindelfingen

*Meiner Frau  
und unseren Kindern*

**Vorwort**

Es ist ein altes Problem in der Anfangsausbildung in Physik: Man braucht ein gewisses Repertoire an mathematischen Kenntnissen und Fähigkeiten. Es handelt sich zunächst um ein relativ beschränktes, jedoch zum Teil recht spezifisches Repertoire. Vor allem: man braucht es *r e c h t z e i t i g*.

Dieses zu vermitteln und zwar wenn irgend möglich in Tutorien, kleinen Arbeitsgemeinschaften, im Selbststudium, aber auch als Vorlesungsbegleittext, stellt sich das vorliegende Studienbuch als Aufgabe. Es sollen Studienanfänger im ersten Studienjahr angesprochen und möglichst weit geführt werden. Nur das letzte Kapitel geht deutlich darüber hinaus und wird den Fortgeschrittenen interessieren. Daher ist der Text zunächst ausführlich in seiner Argumentation und führt erst allmählich zu straffen, redundanzarmen Formulierungen. Die Motivation wird in physikalischen Fragestellungen gesucht. Die Auswahl der behandelten Themen ist orientiert an Bedürfnissen der Physik, so wie sie in den experimentellen Vorlesungen oder den klassischen theoretischen Kursvorlesungen auftreten. Dabei kann auf vieles verzichtet werden, was die Studenten in den mathematischen Kursvorlesungen *f r ü h g e n u g* lernen können.

Ein wichtiges Element einer Lehraufgabe besteht m. E. darin, sich nicht allein mit der Faktenmitteilung zu begnügen. Ich habe vielmehr versucht, auch den „Werkzeugcharakter“ mathematischer Begriffsbildungen oder Erkenntnisse herauszuarbeiten. Wo nötig, werden durch äquivalente oder redundante Formulierungen Lernhilfen gegeben.

Diesem Zweck dienen insbesondere zahlreiche ausgearbeitete Beispiele. Sie sollen den Leser – falls es ihm als angenehm und hilfreich erscheint – eng durch konkrete, z. T. rechnerische Aufgaben führen und dadurch „exemplarisches“ Lernen erlauben. Die Absolvierung dieses „Trainingsprogramms“ sei jedem Leser sehr nahegelegt. Könnerschaft ohne stetige Erprobung und Übung wird nur sehr wenigen geschenkt sein! Der Selbstbestätigung und dem Anreiz, alleine Problemchen mit frisch erworbenen Fähigkeiten zu knacken, dienen die zahlreichen „Übungen zum Selbsttest“. Sie sind ganz überwiegend so eng mit dem jeweiligen Erkenntnisstand des Textes verknüpft, daß ihre Bewältigung eine lösbare Aufgabe ist. Ja, sie sind eigentlich kleine Abbilder dessen, was im weiteren Studium sowie im späteren Beruf immer wieder benötigt wird.

Wenn man ehrlich ist und keine Vogel-Strauß-Mentalität bevorzugt: Solange die Übungen zum Selbsttest nicht als einfach und leicht empfunden werden, ist das angestrebte Studienziel noch nicht erreicht. Man befrage Tutoren, Assistenten, Dozenten und gebe nicht auf! Der schließlich erworbene „mathematische Freischwimmer“ wird die Grundlage für die kommenden Studienjahre sein.

Der vorgelegte Text ist bewußt auch unter didaktischen Gesichtspunkten konzipiert worden. Daher sei schon hier eine erste Aufgabe zum Nachdenken gestellt:

Der Leser mache sich Gedanken, ob und wie es besser geht. — Da es natürlich zu jedem vorgefundenen Konzept eine oder mehrere Alternativen gibt, verfallt man nicht dem zwar naheliegenden aber falschen Schluß, es genüge, den obigen Terminus „besser“ zu lesen als „ander“. Für Verbesserungsvorschläge bin ich stets dankbar — sicher auch mancher zukünftige Leser, der davon profitiert. Inhalt und Umfang des Buches sind mehrfach erprobt worden. Durch Kontakte mit Übungsleitern und Tutoren sowie durch eigene Erfahrungen in kleinen Übungsgruppen habe ich versucht, den Bedürfnissen der Studienanfänger Rechnung zu tragen. Allen sei herzlich gedankt, die auf diese Weise zum Nutzen der Leser am Gelingen mitgewirkt haben.

Besonders erfreut bin ich über die Hinweise aus Ingenieur-Kreisen, daß das Studienbuch auch für den mathematische Betrachtungen benötigenden Ingenieur ein nützliches Hilfsmittel darstellt, so daß der Benutzerkreis größer ist als der Kreis der angehenden Physiker, Mathematiker und weiteren Naturwissenschaftler.

Die vorliegende 5. Auflage hat eine ganze Reihe von kleineren inhaltlichen Ergänzungen, Präzisierungen und Verbesserungen in der Darstellung erfahren, die überwiegend aus der Vorlesung hervorgegangen sind. Nur noch ganz wenige Druckfehler waren auszumerzen. Nützlich mag eine übersichtliche Darstellung der Integralsätze im  $\mathbb{R}^4$  sein, wie sie z. B. in der relativistischen Feldphysik im vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum Verwendung finden. Den in der 3. Auflage schon teilweise eingefügten Abschnitten über Vektorrandwertaufgaben, über die Bestimmung von Feldern aus ihren Quellen und Wirbeln sowie der kleinen Einführung in die Methode der Greenschen Funktionen ist ein eigenes Kapitel zugewiesen worden, das inhaltlich erheblich erweitert wurde. Die gekoppelten Vektor- und Skalar-Differentialgleichungen der Elektrodynamik, der Elastizitätstheorie und der (linearen) Hydrodynamik werden behandelt. Gezeigt wird, wie man sie entkoppeln kann, auch Eich-Kopplungen vermeidet, und wie man sie unabhängig von speziellen Symmetrien der Geometrie stets auf skalare Gleichungen zurückführen kann. Diese Abschnitte gehen über die bestehende Lehrbuch-, sogar Handbuchliteratur hinaus, in denen nur hier und dort Spezialfälle behandelt werden.

Marburg, im Januar 1988

S. Großmann

# Inhalt

## 1. Vektoren

1.1. Definition von Vektoren	13
1.1.1. Skalare	13
1.1.2. Vektoren	13
1.1.2.1. Vorläufiges. 1.1.2.2. Bezugssysteme. 1.1.2.3. Komponenten. 1.1.2.4. Koordinatentransformationen. 1.1.2.5. Vektordefinition	
1.1.3. Tensoren	19
1.2. Addition von Vektoren und Multiplikation mit Zahlen	22
1.2.1. Addieren und Subtrahieren	22
1.2.2. Übungen zum Selbsttest: Vektoraddition	24
1.2.3. Multiplikation von Vektoren mit Zahlen	25
1.2.4. Komponentendarstellung der Vektoren	26
1.2.4.1. Einheitsvektoren. 1.2.4.2. Komponenten. 1.2.4.3. Umrechnung zwischen Komponenten- und Pfeildarstellung	
1.2.5. Rechenregeln in Komponentendarstellung	30
1.2.5.1. Addition und Subtraktion. 1.2.5.2. Multiplikation mit Zahlen. 1.2.5.3. Beispiele zur üben Erläuterung	
1.2.6. Übungen zum Selbsttest: Vektoralgebra	32
1.3. Das Innere Produkt von Vektoren	33
1.3.1. Definition	33
1.3.2. Eigenschaften des Inneren Produktes	34
1.3.3. Beispiele zur üben Erläuterung	37
1.3.4. Algebraische Definition des Vektorraumes	39
1.3.5. Übungen zum Selbsttest: Inneres Produkt	40
1.4. Koordinatentransformationen	40
1.4.1. Die Transformationsmatrix	40
1.4.1.1. Beschreibung einer Koordinatendrehung. 1.4.1.2. Zuordnung von Drehungen und Matrizen. 1.4.1.3. Die Determinante der Drehmatrix	
1.4.2. Die Transformationsformeln für Vektoren	44
1.4.3. Beispiele zu üben Erläuterung	46
1.4.4. Die Transformationsformeln für Tensoren	47
1.4.5. Übungen zum Selbsttest: Koordinatentransformationen	48
1.5. Matrizen	49
1.5.1. Definitionen	49
1.5.2. Multiplikation von Matrizen	51
1.5.3. Inverse Matrizen	53
1.5.4. Matrizen – Tensoren – Transformationen	56

1.5.5. Beispiele zur übenden Erläuterung . . . . .	56
1.5.6. Übungen zum Selbsttest: Matrizen . . . . .	58
1.6. Determinanten . . . . .	59
1.6.1. Definition . . . . .	59
1.6.2. Eigenschaften von Determinanten . . . . .	62
1.6.3. Beispiele zur übenden Erläuterung . . . . .	64
1.6.4. Übungen zum Selbsttest: Determinanten . . . . .	67
1.7. Das Äußere Produkt von Vektoren . . . . .	68
1.7.1. Definition . . . . .	68
1.7.2. Eigenschaften des Äußeren Produktes . . . . .	69
1.7.3. Komponentendarstellung des Äußeren Produktes, Transformationsverhalten . . . . .	71
1.7.4. Beispiele zur übenden Erläuterung . . . . .	73
1.7.5. Übungen zum Selbsttest: Äußeres Produkt . . . . .	76
1.8. Mehrfache Vektorprodukte . . . . .	76
1.8.1. Grundregeln . . . . .	76
1.8.2. Spatprodukt dreier Vektoren . . . . .	77
1.8.3. Entwicklungssatz für 3-fache Vektorprodukte . . . . .	78
1.8.4. n-fache Produkte . . . . .	79
1.8.5. Beispiele zur übenden Erläuterung . . . . .	79
1.8.6. Übungen zum Selbsttest: Mehrfachprodukte . . . . .	80

**2. Vektorfunktionen**

2.1. Vektorwertige Funktionen . . . . .	82
2.1.1. Definition . . . . .	82
2.1.2. Parameterdarstellung von Raumkurven . . . . .	83
2.2. Ableitung vektorwertiger Funktionen . . . . .	85
2.2.1. Definition der Ableitung . . . . .	85
2.2.2. Beispiele zur übenden Erläuterung . . . . .	86
2.2.3. Rechenregeln für die Vektordifferentiation . . . . .	87
2.2.4. Übungen zum Selbsttest: Ableitung von Vektoren . . . . .	88
2.3. Raumkurven . . . . .	88
2.3.1. Bogenmaß und Tangenten-Einheitsvektor . . . . .	89
2.3.2. Die Normale . . . . .	89
2.3.3. Die Binormale . . . . .	91
2.3.4. Frenetsche Formeln für das begleitende Dreibein . . . . .	91
2.3.5. Beispiele zur übenden Erläuterung . . . . .	92
2.3.6. Übungen zum Selbsttest: Raumkurven . . . . .	93

**3. Felder**

3.1. Physikalische Felder . . . . .	94
-------------------------------------	----

3.1.1. Allgemeine Definition . . . . .	94
3.1.2. Skalare Felder . . . . .	95
3.1.3. Vektor-Felder . . . . .	97
3.1.4. Übungen zum Selbsttest: Darstellung von Feldern . . . . .	100
3.2. Partielle Ableitungen . . . . .	100
3.2.1. Definition der partiellen Ableitung . . . . .	100
3.2.2. Beispiele – Rechenregeln – Übungen . . . . .	102
3.2.3. Die Kettenregel . . . . .	105
3.2.4. Übungen zum Selbsttest: Partielle Ableitungen . . . . .	106
3.3. Gradient . . . . .	106
3.3.1. Richtungsableitung . . . . .	106
3.3.2. Definition des Gradienten . . . . .	108
3.3.3. Interpretation und Rechenregeln . . . . .	109
3.3.4. Beispiele zur üben Erläuterung . . . . .	110
3.3.5. Taylorentwicklung für Felder . . . . .	111
3.3.6. Übungen zum Selbsttest: Der Gradient . . . . .	114
3.4. Divergenz . . . . .	115
3.4.1. Definition der Divergenz von Vektorfeldern . . . . .	115
3.4.2. Beispiele und Rechenregeln . . . . .	116
3.4.3. Interpretation als lokale Quellstärke . . . . .	117
3.4.4. Übungen zum Selbsttest: Die Divergenz . . . . .	119
3.5. Rotation . . . . .	120
3.5.1. Definition der Rotation von Vektorfeldern . . . . .	120
3.5.2. Interpretation als lokale Wirbelstärke . . . . .	121
3.5.3. Eigenschaften und Rechenregeln der Operation $\text{rot}$ . . . . .	122
3.5.4. Beispiele zur üben Erläuterung . . . . .	123
3.5.5. Übungen zum Selbsttest: Die Rotation . . . . .	124
3.6. Der Vektor-Differentialoperator $\vec{\nabla}$ (Nabla) . . . . .	125
3.6.1 Formale Zusammenfassung der Vektor-Differentialoperationen durch $\vec{\nabla}$ . . . . .	125
3.6.2. Zusammenfassende Übersicht der Eigenschaften von $\vec{\nabla}$ . . . . .	126
3.6.3. Übungen zum Selbsttest: Der Nabla-Operator . . . . .	127
<b>4. Integration</b>	
4.1. Physikalische Motivation . . . . .	128
4.2. Das Integral über Funktionen . . . . .	134
4.2.1. Definition des (bestimmten) Riemann-Integrals . . . . .	134
4.2.2. Eigenschaften des bestimmten Integrals . . . . .	136
4.2.3. Übungen zum Selbsttest: Riemannsummen . . . . .	138
4.2.4. Das unbestimmte Integral . . . . .	139
4.2.5. Einfache Integraltabelle . . . . .	142
4.2.6. Übungen zum Selbsttest: Integrale . . . . .	143



4.3. Methoden zur Berechnung von Integralen . . . . .	143
4.3.1. Substitution . . . . .	143
4.3.2. Partielle Integration . . . . .	145
4.3.3. Übungen zum Selbsttest: Substitution, partielle Integration . . .	147
4.3.4. Integral-Funktionen . . . . .	148
4.3.5. Numerische Bestimmung von Integralen . . . . .	148
4.4. Uneigentliche Integrale . . . . .	149
4.4.1. Definition uneigentlicher Integrale mit unendlichen Grenzen . . .	150
4.4.2. Beispiele zur üben Erläuterung . . . . .	151
4.4.3. Singuläre Integranden . . . . .	152
4.4.4. Beispiele zur üben Erläuterung . . . . .	154
4.4.5. Übungen zum Selbsttest: Uneigentliche Integrale . . . . .	155
4.5. Parameterintegrale . . . . .	156
4.5.1. Differentiation eines Parameterintegrals . . . . .	156
4.5.2. Integration von Parameterintegralen . . . . .	158
4.5.3. Uneigentliche Parameterintegrale . . . . .	160
4.5.4. Übungen zum Selbsttest: Parameterintegrale . . . . .	161
4.6. Die $\delta$ -Funktion . . . . .	161
4.6.1. Heuristische Motivation . . . . .	161
4.6.2. Definition der $\delta$ -Funktion . . . . .	163
4.6.3. Darstellung durch „glatte“ Funktionen . . . . .	164
4.6.4. Praktischer Umgang . . . . .	165
4.6.5. Übungen zum Selbsttest: $\delta$ -Funktion . . . . .	167

## 5. Vektorintegration

5.1. (Gewöhnliches) Integral über Vektoren . . . . .	168
5.1.1. Definition . . . . .	168
5.1.2. Beispiele zur üben Erläuterung . . . . .	168
5.1.3. Übungen zum Selbsttest: Integral über Vektoren . . . . .	170
5.2. Kurvenintegrale . . . . .	171
5.2.1. Definition . . . . .	171
5.2.2. Verfahren zur Berechnung . . . . .	172
5.2.3. Beispiele zur üben Erläuterung . . . . .	173
5.2.4. Kurvenintegrale über Gradientenfelder: Unabhängigkeit vom Weg	175
5.2.5. Wirbelfreiheit als Kriterium . . . . .	178
5.2.6. Beispiel . . . . .	184
5.2.7. Kurvenintegrale mit anderem Vektorcharakter: Skalare Felder, Vektorprodukte . . . . .	185
5.2.8. Übungen zum Selbsttest: Kurvenintegrale . . . . .	187
5.2.9. Das Vektorpotential . . . . .	188
5.3. Flächenintegrale . . . . .	191
5.3.1. Definition . . . . .	191

5.3.2. Beschreibung von Flächen im Raum . . . . .	193
5.3.2.1. Kartesische Parameter. 5.3.2.2. Zylinderkoordinaten.	
5.3.2.3. Kugelkoordinaten. 5.3.2.4. Übungen zum Selbsttest:	
Krummlinige Koordinaten. 5.3.2.5. Flächenelemente	
5.3.3. Doppelintegrale . . . . .	198
5.3.3.1. Definition. 5.3.3.2. Iterierte Integrale. 5.3.3.3. Übungen	
zum Selbsttest: Doppelintegrale	
5.3.4. Wechsel der Variablen . . . . .	201
5.3.4.1. Parametertransformation. 5.3.4.2. Die Funktionaldeter-	
minante. 5.3.4.3. Die Transformation von Flächenelementen.	
5.3.4.4. Übungen zum Selbsttest: Variablentransformation	
5.3.5. Berechnung von Flächenintegralen . . . . .	206
5.3.5.1. Zusammenfassung der Formeln. 5.3.5.2. Beispiele zur	
übenden Erläuterung. 5.3.5.3. Flächenintegrale in Parameterdar-	
stellung. 5.3.5.4. Beispiele zur übenden Erläuterung . . . . .	
5.3.6. Übungen zum Selbsttest: Flächenintegrale . . . . .	215
5.4. Volumenintegrale . . . . .	215
5.4.1. Definition . . . . .	216
5.4.2. Dreifachintegrale . . . . .	216
5.4.3. Wechsel der Variablen . . . . .	218
5.4.3.1. Funktionaldeterminante. 5.4.3.2. Transformation von	
Volumenelementen	
5.4.4. Vektorielle Volumenintegrale . . . . .	222
5.4.5. Beispiele zur übenden Erläuterung . . . . .	222
5.4.6. Übungen zum Selbsttest: Volumenintegrale . . . . .	224

## 6. Integralsätze

6.1. Die Darstellung des Nabla-Operators durch den Limes von Flächeninte-	
gralen . . . . .	226
6.1.1. Integraldarstellung von $\operatorname{div}$ . . . . .	226
6.1.2. Integraldarstellung von $\vec{\nabla}$ allgemein . . . . .	228
6.2. Der Gaußsche Satz . . . . .	229
6.2.1. Herleitung und Formulierung . . . . .	229
6.2.2. Beispiele und Erläuterungen . . . . .	231
6.2.3. Allgemeine Form des Gaußschen Satzes . . . . .	233
6.2.4. Der Gaußsche Satz in D Dimensionen . . . . .	234
6.3. Partielle Integration mittels Gaußschem Satz . . . . .	235
6.3.1. Methode . . . . .	236
6.3.2. Beispiele . . . . .	236
6.3.3. Der Greensche Satz . . . . .	237
6.4. Übungen zum Selbsttest: Gaußscher Satz . . . . .	238

6.5. Die Darstellung des Nabla-Operators durch den Limes von Kurvenintegralen . . . . .	238
6.5.1. Kurvenintegral-Darstellung von $\text{rot}$ . . . . .	238
6.5.2. Kurvenintegral-Darstellung von $\vec{\nabla}$ allgemein . . . . .	240
6.6. Der Stokessche Satz . . . . .	241
6.6.1. Herleitung und Formulierung . . . . .	241
6.6.2. Beispiele und Erläuterungen . . . . .	243
6.6.3. Allgemeine Form des Stokesschen Satzes . . . . .	245
6.6.4. Der Stokessche Satz in D Dimensionen . . . . .	246
6.7. Übungen zum Selbsttest: Stokesscher Satz . . . . .	247
6.8. Die Integralsätze in D = 4 Dimensionen . . . . .	248

**7. Krummlinige Koordinaten**

7.1. Lokale Koordinatensysteme . . . . .	250
7.1.1. Das Linienelement in krummlinigen Koordinaten . . . . .	250
7.1.2. Krummlinig-orthogonale Koordinaten . . . . .	251
7.1.3. Zylinder- und Kugelkoordinaten als Beispiele . . . . .	253
7.1.4. Übungen zum Selbsttest: Krummlinig-orthogonale Koordinatensysteme . . . . .	253
7.2. Differentialoperatoren in krummlinig-orthogonalen Koordinaten . . . . .	254
7.2.1. grad, div, rot, $\Delta$ allgemein . . . . .	254
7.2.2. Die Formeln in Zylinderkoordinaten . . . . .	256
7.2.3. Die Formeln in Kugelkoordinaten . . . . .	257
7.2.4. Übungen zum Selbsttest: Differentialoperationen in krummlinigen Koordinaten . . . . .	258

**8. Randwertprobleme**

8.1. Die Rolle der Randbedingungen; Eindeutigkeitsatz . . . . .	259
8.2. Bestimmung eines wirbelfreien Feldes aus seinen Quellen und Randwerten . . . . .	263
8.2.1. Feld einer Ladungsverteilung im unendlichen Raum . . . . .	263
8.2.2. Feld einer Ladungsverteilung bei endlichem Rand; Greensche Funktionen . . . . .	266
8.3. Wirbel- und quellenfreie Vektorfelder . . . . .	270
8.4. Bestimmung eines quellenfreien (inkompressiblen) Feldes aus seinen Wirbeln . . . . .	271
8.4.1. Wirbelfeld im unendlichen Raum . . . . .	272
8.4.2. Wirbelfeld im endlichen Bereich . . . . .	273
8.5. Der (Helmholtzsche) Hauptsatz der Vektoranalysis . . . . .	275

8.6. Vektordifferentialgleichungen . . . . .	276
8.6.1. Elektromagnetische Felder . . . . .	276
8.6.1.1. Statische Felder. 8.6.1.2. Feldgetriebene Ströme in Leitern. 8.6.1.3. Elektromagnetische Wellen.	
8.6.2. Elastische Körper . . . . .	281
8.6.3. Flüssigkeitsströmungen . . . . .	282
8.6.4. Reduktion der Vektorpotentialgleichung auf eine Amplitudengleichung . . . . .	284
8.6.5. Zusammenfassung in Darstellungssätzen . . . . .	288
<b>Anhang</b>	
Lösungen der Übungen zum Selbsttest . . . . .	290
Kleine Literaturlauswahl . . . . .	300
Sachverzeichnis . . . . .	301

## Häufig verwendete Symbole

$=:$	definitionsgemäß gleich
$\equiv$	identisch gleich
$\cong$	entspricht
$\vec{a}, \vec{r}, \dots$	Vektor $a$ , Vektor $r$ , ...
$a,  \vec{a} $	Beträge des Vektors $\vec{a}$
$a_i$	Vektorkomponenten
$\vec{e}, \vec{a}^0$	Einheitsvektoren
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Inneres Produkt
$\vec{a} \times \vec{b}$	Äußeres Produkt
$\delta_{ij}$	$= \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$
$\epsilon_{ijk}$	$= \begin{cases} 1 & i, j, k \text{ zyklisch zu } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{falls } i, j, k \text{ antizyklisch zu } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$(a_{ij})$	Matrix
$(D_{ij}), D$	Drehmatrix
$\mathbf{1}$	Einheitsmatrix
$r, \vartheta, \varphi$	Polarkoordinaten
$\rho, \varphi, z$	Zylinderkoordinaten
$\partial\phi/\partial x_i, \partial_i$	partielle Ableitung nach $x_i$
$\text{grad } \phi, \partial\phi/\partial\vec{r}$	Gradient des skalaren Feldes $\phi$
$\text{div } \vec{A}$	Divergenz des vektoriiellen Feldes $\vec{A}$
$\text{rot } \vec{A}$	Rotation (= curl)
$\vec{\nabla}$	Nabla-Operator
$\int_C \dots$	Linien- bzw. Kurvenintegral
$\oint$	geschlossenes Kurven- oder Flächenintegral