

**Burg / Haf / Wille**

# **Höhere Mathematik für Ingenieure**

**Band II Lineare Algebra**

Von Prof. Dr. rer. nat. Friedrich Wille †  
Prof. Dr. rer. nat. Herbert Haf  
Prof. Dr. rer. nat. Klemens Burg  
Universität Kassel, Gesamthochschule

3., durchgesehene Auflage  
Mit 124 Figuren, zahlreichen Beispielen  
und 151 Übungen, zum Teil mit Lösungen



**B. G. Teubner Stuttgart 1992**

Prof. Dr. rer. nat. Klemens Burg

Geboren 1934 in Bochum. Von 1954 bis 1956 Tätigkeit in der Industrie. Von 1956 bis 1961 Studium der Mathematik und Physik an der Technischen Hochschule Aachen und 1961 Diplom-Prüfung in Mathematik. 1964 Promotion, von 1961 bis 1973 Wiss. Assistent und Akad. Rat/Oberrat, 1970 Habilitation und von 1973 bis 1975 Wiss. Rat und Professor an der Universität Karlsruhe. Seit 1975 Professor für Ingenieurmathematik an der Universität Kassel, Gesamthochschule. Arbeitsgebiete: Mathematische Physik, Ingenieurmathematik.

Prof. Dr. rer. nat. Herbert Haf

Geboren 1938 in Pfronten/Allgäu. Von 1956 bis 1960 Studium der Feinwerktechnik-Optik am Oskar-von-Miller-Polytechnikum München. Von 1960 bis 1966 Studium der Mathematik und Physik an der Technischen Hochschule Aachen und 1966 Diplomprüfung in Mathematik. Von 1966 bis 1970 Wiss. Assistent, 1968 Promotion und von 1970 bis 1974 Akad. Rat/Oberrat an der Universität Stuttgart. Von 1968 bis 1974 Lehraufträge an der Universität Stuttgart und seit 1974 Professor für Mathematik (Analysis) an der Universität Kassel. Seit 1985 Vorsitzender der Naturwissenschaftlich-Medizinischen Gesellschaft Kassel.

Arbeitsgebiete: Funktionalanalysis, Verzweigungs-Theorie, Approximationstheorie.

Prof. Dr. rer. nat. Friedrich Wille †

Geboren 1935 in Bremen. Von 1955 bis 1961 Studium der Mathematik und Physik an den Universitäten in Marburg, Berlin und Göttingen, 1961 Diplom und anschließend Industriepraxis. Von 1963 bis 1968 Wiss. Mitarbeiter der Aerodynamischen Versuchsanstalt (AVA) Göttingen, 1965 Promotion, Leiter des Rechenzentrums Göttingen. Von 1968 bis 1971 Wiss. Assistent an den Universitäten Freiburg und Düsseldorf und freier Wiss. Mitarbeiter der Deutschen Forschungs- u. Versuchsanstalt für Luft- u. Raumfahrt (DFVLR). 1970 Battelle-Institut Genf. 1971 Habilitation, 1972 Wiss. Rat und Professor in Düsseldorf. 1973 Professor für Angewandte Mathematik an der Universität Kassel.

Arbeitsgebiete: Aeroelastik, Nichtlineare Analysis, math. Modellierung.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

**Höhere Mathematik für Ingenieure** / Burg ; Haf ; Wille. –  
Stuttgart : Teubner.

NE: Burg, Klemens; Haf, Herbert; Wille, Friedrich

Bd. 2. Lineare Algebra / von Friedrich Wille ... – 3., durchges.

Aufl. – 1992

ISBN 978-3-519-22956-8

ISBN 978-3-322-92692-0 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-92692-0

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt besonders für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

© B. G. Teubner Stuttgart 1987

Satz: Schreibdienst Henning Heinze, Nürnberg

## Vorwort

Der vorliegende Band II der Höheren Mathematik für Ingenieure enthält eine in sich geschlossene Darstellung der „Linearen Algebra“ mit vielfältigen Bezügen zur Technik und Naturwissenschaft.

Adressaten sind in erster Linie Ingenieurstudenten, aber auch Studenten der Angewandten Mathematik und Physik, etwa der Richtungen Technomathematik, mathematische Informatik, theoretische Physik. Sicherlich wird auch der „reine“ Mathematiker für ihn Interessantes in dem Buch finden.

Der Band ist – bis auf wenige Querverbindungen – unabhängig vom Band I „Analysis“ gestaltet, so daß man einen Kursus über Ingenieurmathematik auch mit dem vorliegenden Buch beginnen kann. (Beim Studium der Elektrotechnik wird z. B. gerne mit Linearer Algebra begonnen.) Vorausgesetzt werden lediglich Kenntnisse aus der Schulmathematik.

Auch die einzelnen Abschnitte des Buches sind mit einer gewissen Unabhängigkeit voneinander konzipiert, so daß Quereinstiege möglich sind. Dem Leser, der schon einen ersten Kursus über Lineare Algebra absolviert hat, steht in diesem Bande ein Nachschlagewerk zur Verfügung, welches ihm in der Praxis oder beim Examen eine Hilfe ist.

Die Bedeutung der Linearen Algebra für Technik und Naturwissenschaft ist in diesem Jahrhundert stark gestiegen. Insbesondere ist die Matrizen-Rechnung, die sich erst in den dreißiger Jahren in Physik und Technik durchzusetzen begann, heute ein starkes Hilfsmittel in der Hand des Ingenieurs. Darüber hinaus führt die Synthese von Linearer Algebra und Analysis zur Funktionalanalysis, die gerade in den letzten Jahrzehnten zu einem leistungsfähigen theoretischen Instrumentarium für Naturwissenschaft und Technik geworden ist.

Im ganzen erweist sich die Lineare Algebra – abgesehen von der elementaren Vektorrechnung – als ein Stoff mit höherem Abstraktionsgrad als er bei der Analysis auftritt. Obwohl dies dem Ingenieurstudenten zu Anfang gewisse Schwierigkeiten bereiten kann, so entspricht es doch der Entwicklung unserer heutigen Technik, die nach immer effektiveren mathematischen Methoden verlangt.

Zum **Inhalt**: Im Abschnitt 1 wird die Vektorrechnung in der Ebene und im dreidimensionalen Raum ausführlich entwickelt. Ihre Verwendbarkeit wird an vielen Anwendungsbeispielen aus dem Ingenieurbereich gezeigt.

Im Abschnitt 2 werden endlichdimensionale Vektorräume behandelt, wobei mit dem Spezialfall des  $\mathbb{R}^n$  begonnen wird, sowie dem Gaußschen Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Der Gaußsche Algorithmus zieht sich dann als Schlüsselmethode sowohl bei praktischen wie bei theoretischen Folgerungen durch das ganze Buch. Im zweiten Teil des Abschnittes 2 werden algebraische Grundstrukturen (Gruppen, Körper) sowie Vektorräume in moderner abstrakter Form eingeführt. Diesen Teil mag der Ingenieurstudent beim ersten Durchgang überspringen, wiewohl die algebraischen Strukturen für ein späteres tieferes Verständnis notwendig sind.

## IV Vorwort

Der Abschnitt 3 enthält dann in ausführlicher Form die Theorie der Matrizen, verbunden mit linearen Gleichungssystemen, Eigenwertproblemen und geometrischen Anwendungen im dreidimensionalen Raum. Zu diesem mächtigen Instrument für Theorie und Anwendung werden überdies numerische Verfahren für den Computereinsatz angege- ben, und zwar bei linearen Gleichungssystemen mit kleinen und großen (schwach besetz- ten) Matrizen, sowie bei Eigenwertproblemen.

Der vierte Abschnitt behandelt in exemplarischer Weise aktuelle Anwendungen der Linearen Algebra auf die Theorie der Stabwerke, der elektrischen Netzwerke, sowie der Robotik. Hier wird insbesondere ein Einblick in die Kinematik technischer Roboter ge- geben.

Da der Band weit mehr Stoff enthält, als man in einer Vorlesung unterbringen kann, ließe sich ein Kursus für Anfänger an Hand des folgenden „Fahrplans“ zusammenstel- len:

Vektorrechnung im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  (Auswahl aus Abschnitt 1)  
Vektorräume  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$ , lineare Gleichungssysteme, Gaußscher Algorithmus (Abschnitte 2.1 und 2.2 bis 2.2.4)  
Matrizenrechnung (Auswahl aus 3.1–3.3, dazu 3.5.1)  
Determinanten (Auswahl aus 3.4, Schwerpunkt 3.4.9)  
Lineare Gleichungssysteme (Abschnitte 3.6.1 und 3.6.3)  
Eigenwerte und Eigenvektoren (3.7.1, 3.7.2, 3.7.5; Auswahl aus 3.7.3 und 3.7.4)  
Matrix-Polynome (Auswahl aus 3.9.1–3.9.3)  
Drehungen, Koordinatentransformationen (Abschnitte 3.10.1, 3.10.3, 3.10.6 und 3.10.8: Satz über Hauptachsentransformation ohne Beweis)  
Kegelschnitte und Flächen 2. Ordnung (Abschnitte 3.10.9, 3.10.10, zur Erholung, falls noch Zeit bleibt)

Durch eingestreute Anwendungen, insbesondere aus dem Abschnitt 4, läßt sich der Stoff anreichern.

Das Buch ist in Zusammenarbeit aller drei Verfasser entstanden. Die Kapitel 1 und 2, die Abschnitte 3.1 bis 3.8 sowie Abschnitt 3.10 wurden von Friedrich Wille verfaßt. Das Anwendungskapitel 4, Abschnitt 3.9 und einige weitere Teile stammen von Herbert Haf. Dabei wurden beide Autoren durch ein Skriptum von Klemens Burg unterstützt.

Die Autoren danken Herrn Doz. Dr. W. Strampp, Herrn Dr. B. Billhardt und Herrn F. Renner für geleistete Korrekturarbeiten und Aufgabenlösungen. Herrn K. Strube gilt unser Dank für das sorgfältige Anfertigen der Bilder und Frau E. Münstedt für begleitende Schreivarbeiten. Unser besonderer Dank gilt Frau F. Ritter, die mit äußerster Sorgfalt den allergrößten Teil der Reinschrift erstellt hat. Schließlich danken wir dem Teubner-Verlag für geduldige und hilfreiche Zusammenarbeit in allen Phasen.

Die günstige Aufnahme dieses Bandes erfordert schon nach kurzer Zeit eine Neuauf- lage. Der Text ist gegenüber der Erstauflage unverändert geblieben. Es wurden lediglich einige Figuren verbessert und Druckfehler ausgemerzt. Die Verfasser erhoffen ein wei- terhin positives Echo auch dieser Auflage durch den Leser.

## **Vorwort zur dritten Auflage**

Die vorliegende Auflage von Band II unterscheidet sich im Aufbau und Text kaum von der vorangehenden Auflage. Das Schriftbild wurde aber mit Hilfe eines Computerschreibprogramms neu gestaltet. Die Verfasser hoffen, mit dieser verbesserten Erscheinungsform dem Leser entgegenzukommen.

Unser Mitautor Friedrich Wille ist am 9. August dieses Jahres verstorben. Er war maßgeblich an diesem Band beteiligt.

Kassel, im August 1992

Herbert Haf

# Inhalt

## 1 Vektorrechnung in zwei und drei Dimensionen

<b>1.1</b>	<b>Vektoren in der Ebene</b>	1
1.1.1	Kartesische Koordinaten und Zahlenmengen	2
1.1.2	Winkelfunktionen und Polarkoordinaten	4
1.1.3	Vektoren im $\mathbb{R}^2$	9
1.1.4	Physikalische und technische Anwendungen	14
1.1.5	Inneres Produkt (Skalarprodukt)	24
1.1.6	Parameterform und Hessesche Normalform einer Geraden	28
1.1.7	Geometrische Anwendungen	35
<b>1.2</b>	<b>Vektoren im dreidimensionalen Raum</b>	44
1.2.1	Der Raum $\mathbb{R}^3$	44
1.2.2	Inneres Produkt (Skalarprodukt)	49
1.2.3	Dreireihige Determinanten	52
1.2.4	Äußeres Produkt (Vektorprodukt)	53
1.2.5	Physikalische, technische und geometrische Anwendungen	59
1.2.6	Spatprodukt, mehrfache Produkte	66
1.2.7	Lineare Unabhängigkeit	70
1.2.8	Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$	74

## 2 Vektorräume beliebiger Dimensionen

<b>2.1</b>	<b>Die Vektorräume <math>\mathbb{R}^n</math> und <math>\mathbb{C}^n</math></b>	79
2.1.1	Der Raum $\mathbb{R}^n$ und seine Arithmetik	79
2.1.2	Inneres Produkt, Beträge von Vektoren	81
2.1.3	Unterräume, lineare Mannigfaltigkeiten	82
2.1.4	Geometrie im $\mathbb{R}^n$ , Winkel, Orthogonalität	88
2.1.5	Der Raum $\mathbb{C}^n$	91
<b>2.2</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme, Gaußscher Algorithmus</b>	92
2.2.1	Reguläre quadratische Gleichungssysteme	92
2.2.2	Computerprogramm für reguläre lineare Gleichungssysteme	96
2.2.3	Singuläre lineare Gleichungssysteme	100
2.2.4	Allgemeiner Satz über die Lösbarkeit linearer quadratischer Gleichungssysteme	105
2.2.5	Rechteckige Systeme, Rangkriterium	109
<b>2.3</b>	<b>Algebraische Strukturen: Gruppen und Körper</b>	112
2.3.1	Einführung: Beispiel einer Gruppe	112
2.3.2	Gruppen	115
2.3.3	Endliche Permutationsgruppen	120

## VIII Inhalt

2.3.4	Homomorphismen, Nebenklassen . . . . .	122
2.3.5	Körper . . . . .	125
<b>2.4</b>	<b>Vektorräume über beliebigen Körpern . . . . .</b>	<b>127</b>
2.4.1	Definition und Grundeigenschaften . . . . .	128
2.4.2	Beispiele für Vektorräume . . . . .	130
2.4.3	Unterräume, Basis, Dimension . . . . .	132
2.4.4	Direkte Summen, freie Summen . . . . .	137
2.4.5	Lineare Abbildungen: Definition und Beispiele . . . . .	140
2.4.6	Isomorphismen, Konstruktion linearer Abbildungen . . . . .	144
2.4.7	Kern, Bild, Rang . . . . .	147
2.4.8	Euklidische Vektorräume, Orthogonalität . . . . .	149
2.4.9	Ausblick auf die Funktionalanalysis . . . . .	152

## 3 Matrizen

<b>3.1</b>	<b>Definition, Addition, s-Multiplikation . . . . .</b>	<b>155</b>
3.1.1	Motivation . . . . .	155
3.1.2	Grundlegende Begriffsbildung . . . . .	156
3.1.3	Addition, Subtraktion und s-Multiplikation . . . . .	158
3.1.4	Transposition, Spalten- und Zeilenmatrizen . . . . .	161
<b>3.2</b>	<b>Matrizenmultiplikation . . . . .</b>	<b>162</b>
3.2.1	Matrix-Produkt . . . . .	163
3.2.2	Produkte mit Vektoren . . . . .	166
3.2.3	Matrizen und lineare Abbildungen . . . . .	168
3.2.4	Blockzerlegung . . . . .	171
<b>3.3</b>	<b>Reguläre und inverse Matrizen . . . . .</b>	<b>173</b>
3.3.1	Reguläre Matrizen . . . . .	174
3.3.2	Inverse Matrizen . . . . .	175
<b>3.4</b>	<b>Determinanten . . . . .</b>	<b>178</b>
3.4.1	Definition, Transpositionsregel . . . . .	179
3.4.2	Regeln für Determinanten . . . . .	181
3.4.3	Berechnung von Determinanten mit dem Gaußschen Algorithmus . . . . .	185
3.4.4	Matrix-Rang und Determinanten . . . . .	189
3.4.5	Der Determinanten-Multiplikationssatz . . . . .	191
3.4.6	Lineare Gleichungssysteme: die Cramersche Regel . . . . .	192
3.4.7	Inversenformel . . . . .	194
3.4.8	Entwicklungssatz . . . . .	197
3.4.9	Zusammenstellung der wichtigsten Regeln über Determinanten . . . . .	200
<b>3.5</b>	<b>Spezielle Matrizen . . . . .</b>	<b>202</b>
3.5.1	Definition der wichtigsten speziellen Matrizen . . . . .	203
3.5.2	Algebraische Strukturen von Mengen spezieller Matrizen . . . . .	207

3.5.3	Orthogonale und unitäre Matrizen . . . . .	209
3.5.4	Symmetrische Matrizen und quadratische Formen . . . . .	212
3.5.5	Zerlegungen und Transformationen symmetrischer Matrizen . . . . .	213
3.5.6	Positiv definite Matrizen und Bilinearformen . . . . .	216
3.5.7	Kriterien für positiv definite Matrizen . . . . .	218
3.5.8	Direkte Summe und direktes Produkt von Matrizen . . . . .	221
<b>3.6</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme und Matrizen . . . . .</b>	<b>223</b>
3.6.1	Rangkriterium . . . . .	223
3.6.2	Quadratische Systeme, Fredholmsche Alternative . . . . .	226
3.6.3	Dreieckszerlegung von Matrizen durch den Gaußschen Algorithmus, Cholesky-Verfahren . . . . .	228
3.6.4	Große Gleichungssysteme, Gesamtschrittverfahren . . . . .	231
3.6.5	Einzelschrittverfahren . . . . .	235
<b>3.7</b>	<b>Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .</b>	<b>238</b>
3.7.1	Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren . . . . .	239
3.7.2	Anwendung: Schwingungen . . . . .	242
3.7.3	Eigenschaften des charakteristischen Polynoms . . . . .	244
3.7.4	Eigenvektoren und Eigenräume . . . . .	250
3.7.5	Symmetrische Matrizen und ihre Eigenwerte . . . . .	256
<b>3.8</b>	<b>Die Jordansche Normalform . . . . .</b>	<b>263</b>
3.8.1	Praktische Durchführung der Transformation auf Jordansche Normalform . . . . .	269
3.8.2	Berechnung des charakteristischen Polynoms und der Eigenwerte einer Matrix mit dem Krylov-Verfahren . . . . .	277
3.8.3	Das Jacobi-Verfahren zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen . . . . .	280
3.8.4	Von-Mises-Iteration, Deflation und inverse Iteration zur numerischen Eigenwert- und Eigenvektorberechnung. Ausblick . . . . .	283
<b>3.9</b>	<b>Matrix-Funktionen . . . . .</b>	<b>288</b>
3.9.1	Matrix-Potenzen . . . . .	288
3.9.2	Matrixpolynome . . . . .	290
3.9.3	Annullierende Polynome, Satz von Cayley-Hamilton . . . . .	292
3.9.4	Das Minimalpolynom einer Matrix . . . . .	298
3.9.5	Folgen und Reihen von Matrizen . . . . .	300
3.9.6	Potenzreihen von Matrizen . . . . .	303
3.9.7	Matrix-Exponentialfunktion, Matrix-Sinus- und Matrix-Cosinus-Funktion . . . . .	306
<b>3.10</b>	<b>Drehungen, Spiegelungen, Koordinatentransformationen . . . . .</b>	<b>311</b>
3.10.1	Drehungen und Spiegelungen in der Ebene . . . . .	311
3.10.2	Spiegelung im $\mathbb{R}^n$ , QR-Zerlegung . . . . .	314
3.10.3	Drehungen im dreidimensionalen Raum . . . . .	316
3.10.4	Spiegelungen und Drehspiegelungen im dreidimensionalen Raum . . . . .	323



## X Inhalt

3.10.5	Basiswechsel und Koordinatentransformation . . . . .	324
3.10.6	Transformation bei kartesischen Koordinaten . . . . .	328
3.10.7	Affine Abbildungen und affine Koordinatentransformationen . . . . .	329
3.10.8	Hauptachsentransformation von Quadriken . . . . .	332
3.10.9	Kegelschnitte . . . . .	337
3.10.10	Flächen zweiten Grades: Ellipsoide, Hyperboloide, Paraboloiden . . . . .	341

## 4 Anwendungen

4.1	<b>Technische Strukturen</b> . . . . .	344
4.1.1	Ebene Stabwerke . . . . .	344
4.1.2	Elektrische Netzwerke . . . . .	352
4.2	<b>Roboter-Bewegung</b> . . . . .	362
4.2.1	Einführende Betrachtungen . . . . .	362
4.2.2	Kinematik eines $(n + 1)$ -gliedrigen Roboters . . . . .	364

Lösungen zu den Übungen . . . . .	374
-----------------------------------	-----

Symbole . . . . .	381
-------------------	-----

Literatur . . . . .	384
---------------------	-----

Sachverzeichnis . . . . .	391
---------------------------	-----

**Band I: Analysis (F. Wille)****1 Grundlagen**

- 1.1 Reelle Zahlen
- 1.2 Elementare Kombinatorik
- 1.3 Funktionen
- 1.4 Unendliche Folgen reeller Zahlen
- 1.5 Unendliche Reihen reeller Zahlen
- 1.6 Stetige Funktionen

**2 Elementare Funktionen**

- 2.1 Polynome
- 2.2 Rationale und algebraische Funktionen
- 2.3 Trigonometrische Funktionen
- 2.4 Exponentialfunktion, Logarithmus, Hyperbelfunktionen
- 2.5 Komplexe Zahlen

**3 Differentialrechnung einer reellen Variablen**

- 3.1 Grundlagen der Differentialrechnung
- 3.2 Ausbau der Differentialrechnung
- 3.3 Anwendungen

**4 Integralrechnung einer reellen Variablen**

- 4.1 Grundlagen der Integralrechnung
- 4.2 Berechnung von Integralen
- 4.3 Uneigentliche Integrale
- 4.4 Anwendung: Wechselstromrechnung

**5 Folgen und Reihen von Funktionen**

- 5.1 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen
- 5.2 Potenzreihen
- 5.3 Fourier-Reihen

**6 Differentialrechnung mehrerer reeller Variabler**

- 6.1 Der  $n$ -dimensionale Raum  $\mathbb{R}^n$
- 6.2 Abbildungen im  $\mathbb{R}^n$
- 6.3 Differenzierbare Abbildungen von mehreren Variablen
- 6.4 Gleichungssysteme, Extremalprobleme, Anwendungen

**7 Integralrechnung mehrerer reeller Variabler**

- 7.1 Integration bei zwei Variablen
- 7.2 Allgemeinfall: Integration bei mehreren Variablen
- 7.3 Parameterabhängige Integrale

**Band III: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen (H. Haf)**

**Gewöhnliche Differentialgleichungen**

**1 Einführung in die gewöhnlichen Differentialgleichungen**

- 1.1 Was ist eine Differentialgleichung?
- 1.2 Differentialgleichungen 1-ter Ordnung
- 1.3 Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme 1-ter Ordnung
- 1.4 Ebene autonome Systeme (Einführung)

**2 Lineare Differentialgleichungen**

- 2.1 Lösungsverhalten
- 2.2 Homogene lineare Systeme 1-ter Ordnung
- 2.3 Inhomogene lineare Systeme 1-ter Ordnung
- 2.4 Lineare Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung

**3 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**

- 3.1 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung
- 3.2 Lineare Systeme 1-ter Ordnung

**4 Potenzreihenansätze und Anwendungen**

- 4.1 Potenzreihenansätze
- 4.2 Verallgemeinerte Potenzreihenansätze

**5 Rand- und Eigenwertprobleme. Anwendungen**

- 5.1 Rand- und Eigenwertprobleme
- 5.2 Anwendung auf eine partielle Differentialgleichung
- 5.3 Anwendung auf ein nichtlineares Problem (Stabknickung)

## **Distributionen**

### **6 Verallgemeinerung des klassischen Funktionsbegriffs**

- 6.1 Motivierung und Definition
- 6.2 Distributionen als Erweiterung der klassischen Funktionen

### **7 Rechnen mit Distributionen. Anwendungen**

- 7.1 Rechnen mit Distributionen
- 7.2 Anwendungen

## **Integraltransformationen**

### **8 Fouriertransformation**

- 8.1 Motivierung und Definition
- 8.2 Umkehrung der Fouriertransformation
- 8.3 Eigenschaften der Fouriertransformation
- 8.4 Anwendungen auf partielle Differentialgleichungsprobleme

### **9 Laplacetransformation**

- 9.1 Motivierung und Definition
- 9.2 Umkehrung der Laplacetransformation
- 9.3 Eigenschaften der Laplacetransformation
- 9.4 Anwendungen auf gewöhnliche lineare Differentialgleichungen

### **10 $\mathfrak{F}$ -Transformation**

- 10.1 Motivierung und Definition
- 10.2 Eigenschaften der  $\mathfrak{F}$ -Transformation
- 10.3 Anwendungen

## **Band IV: Vektoranalysis und Funktionentheorie (H. Haf, F. Wille)**

### **Vektoranalysis (F. Wille)**

#### **1 Kurven**

- 1.1 Wege, Kurven, Bogenlängen
- 1.2 Theorie ebener Kurven

## XIV

- 1.3 Beispiele ebener Kurven I: Kegelschnitte
- 1.4 Beispiele ebener Kurven II: Rollkurven, Blätter, Spiralen
- 1.5 Theorie räumlicher Kurven
- 1.6 Vektorfelder, Potentiale, Kurvenintegrale

## 2 Flächen

- 2.1 Flächenstücke und Flächen
- 2.2 Flächenintegrale

## 3 Integralsätze

- 3.1 Der Gaußsche Integralsatz
- 3.2 Der Stokesche Integralsatz
- 3.3 Weitere Differential- und Integralformeln
- 3.4 Wirbelfreiheit, Quellfreiheit, Potentiale

## 4 Alternierende Differentialformen

- 4.1 Alternierende Differentialformen im  $\mathbb{R}^3$
- 4.2 Alternierende Differentialformen im  $\mathbb{R}^n$

## 5 Kartesische Tensoren

- 5.1 Tensoralgebra
- 5.2 Tensoranalysis

## Funktionentheorie (H. Haf)

## 6 Grundlagen

- 6.1 Komplexe Zahlen
- 6.2 Funktionen einer komplexen Variablen

## 7 Holomorphe Funktionen

- 7.1 Differenzierbarkeit im Komplexen, Holomorphie
- 7.2 Komplexe Integration
- 7.3 Erzeugung holomorpher Funktionen durch Grenzprozesse
- 7.4 Asymptotische Abschätzungen

## 8 Isolierte Singularitäten, Laurententwicklung

- 8.1 Laurentreihen
- 8.2 Residuensatz und Anwendungen

## **9 Konforme Abbildungen**

- 9.1 Einführung in die Theorie konformer Abbildungen
- 9.2 Anwendungen auf die Potentialtheorie

## **10 Anwendungen der Funktionentheorie auf die Besselsche Differentialgleichung**

- 10.1 Die Besselsche Differentialgleichung
- 10.2 Die Besselschen und Neumannschen Funktionen
- 10.3 Anwendungen

## **Band V: Funktionalanalysis und Partielle Differentialgleichungen (H. Haf)**

### **Funktionalanalysis**

#### **1 Grundlegende Räume**

- 1.1 Metrische Räume
- 1.2 Normierte Räume. Banachräume
- 1.3 Skalarprodukträume. Hilberträume

#### **2 Lineare Operatoren in normierten Räumen**

- 2.1 Beschränkte lineare Operatoren
- 2.2 Fredholmsche Theorie in Skalarprodukträumen
- 2.3 Symmetrische vollstetige Operatoren

#### **3 Der Hilbertraum $L_2(\Omega)$ und zugehörige Sobolevräume**

- 3.1 Der Hilbertraum  $L_2(\Omega)$
- 3.2 Sobolevräume

### **Partielle Differentialgleichungen**

#### **4 Einführung**

- 4.1 Was ist eine partielle Differentialgleichung?
- 4.2 Lineare partielle Differentialgleichungen 1-ter Ordnung
- 4.3 Lineare partielle Differentialgleichungen 2-ter Ordnung

**5 Helmholtzsche Schwingungsgleichung und Potentialgleichung**

- 5.1 Grundlagen
- 5.2 Ganzraumprobleme
- 5.3 Randwertprobleme
- 5.4 Ein Eigenwertproblem der Potentialtheorie
- 5.5 Einführung in die Methode der finiten Elemente (F. Wille)

**6 Die Wärmeleitungsgleichung**

- 6.1 Rand- und Anfangswertprobleme
- 6.2 Ein Anfangswertproblem

**7 Die Wellengleichung**

- 7.1 Die homogene Wellengleichung
- 7.2 Die inhomogene Wellengleichung im  $\mathbb{R}^3$

**8 Hilbertraummethode**

- 8.1 Einführung
- 8.2 Das schwache Dirichletproblem für lineare elliptische Differentialgleichungen
- 8.3 Das schwache Neumannproblem für lineare elliptische Differentialgleichungen
- 8.4 Zur Regularitätstheorie beim Dirichletproblem