

O. Beyer/H. Hackel/V. Pieper/J. Tiedge

Wahrscheinlichkeitsrechnung
und mathematische Statistik

Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik

Von Prof. Dr. Otfried Beyer
Horst Hackel
Prof. Dr. Volkmar Pieper
Doz. Dr. Jürgen Tiedge

7., neubearbeitete Auflage



B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
Stuttgart · Leipzig 1995

Das Lehrwerk wurde 1972 begründet und wird herausgegeben von:
Prof. Dr. Otfried Beyer, Prof. Dr. Horst Erfurth,
Prof. Dr. Christian Großmann, Prof. Dr. Horst Kadner,
Prof. Dr. Karl Manteuffel, Prof. Dr. Manfred Schneider,
Prof. Dr. Günter Zeidler

Verantwortlicher Herausgeber dieses Bandes:

Prof. Dr. Horst Erfurth

Autoren:

Prof. Dr. Otfried Beyer

Horst Hackel

Prof. Dr. Volkmar Pieper

Doz. Dr. Jürgen Tiedge

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik /

von Otfried Beyer ... [Verantw. Hrsg.: Horst Erfurth]. –

7., neubearb. Aufl. – Stuttgart ; Leipzig : Teubner, 1995

(Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler)

ISBN 978-3-8154-2075-1

ISBN 978-3-322-92396-7 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-92396-7

NE: Beyer, Otfried; Erfurth, Horst [Hrsg.]

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt besonders für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

© B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1995

Umschlaggestaltung: E. Kretschmer, Leipzig

Vorwort zur 7. Auflage

Die vorliegende Auflage ist eine vollständige Überarbeitung unseres 1976 erstmalig erschienenen Lehrbuches. Zum einen werden mit dieser Neubearbeitung die in langjähriger interdisziplinärer Tätigkeit in Forschung und Lehre gewonnenen Erfahrungen und Erkenntnisse den Anwendern der Stochastik zur Verfügung gestellt. Zum anderen ist es notwendig, den im Laufe der Zeit geänderten Erfordernissen und Möglichkeiten der Stochastik Rechnung zu tragen. Die ursprüngliche Zielstellung, die Darstellung eines breiten Spektrums der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik in Form eines auch für das Selbststudium geeigneten Lehrbuches, wurde weiterhin beibehalten. Dabei sind gewisse Teilbereiche gestrafft (z. B. die beschreibende Statistik) und andere erweitert worden (z. B. die speziellen Verteilungen). Besonderen Wert haben wir auf praxisrelevante motivierende Beispiele für die behandelten Fragestellungen gelegt. Manche Änderung ergab sich aus der Entwicklung der Rechentechnik und den dadurch gewonnenen Möglichkeiten einer umfangreichen numerischen Berechnung.

Den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Instituts für Mathematische Stochastik der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg danken wir für viele Anregungen und Hinweise. Unser besonderer Dank gilt Herrn Dr. B. Thiele für seine umfangreiche Unterstützung bei der Gestaltung und Frau K. Altenkirch für ihre gewissenhafte und stetige Arbeit bei der Anfertigung der reproduktionsreifen Druckvorlage. Für Schreibebeiten danken wir Frau K. Behrend, Köthen. Nicht zuletzt danken wir dem verantwortlichen Herausgeber und dem Verlag, insbesondere Herrn J. Weiß, für die verständnisvolle gute Zusammenarbeit. Die Autoren sind für jeden Hinweis und jede Anregung dankbar.

Magdeburg, im August 1995

O. Beyer, H. Hackel, V. Pieper, J. Tiedge

Inhalt

1	Einleitung	11
2	Wahrscheinlichkeitsrechnung	14
2.1	Zufällige Ereignisse	14
2.1.1	Begriff des zufälligen Ereignisses	14
2.1.2	Relationen zwischen zufälligen Ereignissen	18
2.1.3	Das Ereignisfeld	24
2.1.4	Aufgaben	26
2.2	Wahrscheinlichkeit	27
2.2.1	Relative Häufigkeit	27
2.2.2	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	30
2.2.2.1	Axiomatischer Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung	30
2.2.2.2	Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff	33
2.2.3	Ergänzende Betrachtungen	36
2.2.4	Bedingte Wahrscheinlichkeiten, unabhängige Ereignisse	37
2.2.4.1	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	37
2.2.4.2	Unabhängige Ereignisse	42
2.2.5	Beispiele und Aufgaben	45
2.3	Zufallsgrößen	48
2.3.1	Begriff der Zufallsgröße	48
2.3.1.1	Erklärung des Begriffs der Zufallsgröße	48
2.3.1.2	Weiterführende Betrachtungen	50
2.3.2	Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße	51
2.3.2.1	Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung	51
2.3.2.2	Diskrete Zufallsgrößen	53
2.3.2.3	Stetige Zufallsgrößen	57
2.3.2.4	Beispiele	60
2.3.2.5	Zusammenfassung	63
2.3.3	Kennwerte einer Zufallsgröße	64
2.3.3.1	Der Erwartungswert	64
2.3.3.2	Die Varianz	67

2.3.3.3	Der Erwartungswert von Funktionen einer Zufallsgröße	70
2.3.3.4	Momente einer Zufallsgröße	73
2.3.3.5	Zusammenfassung	74
2.3.3.6	Einige weitere Kennwerte	76
2.3.4	Funktionen einer Zufallsgröße	78
2.3.5	Aufgaben	81
2.3.6	Einige spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen	82
2.3.6.1	Die Null-Eins-Verteilung	82
2.3.6.2	Die Binomialverteilung	84
2.3.6.3	Die Poissonverteilung	87
2.3.6.4	Die hypergeometrische Verteilung	89
2.3.6.5	Zusammenfassung	91
2.3.7	Einige spezielle stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen	93
2.3.7.1	Die gleichmäßige stetige Verteilung	93
2.3.7.2	Die Exponentialverteilung	94
2.3.7.3	Die Normalverteilung	96
2.3.7.4	Zusammenfassung	102
2.3.8	Mehrdimensionale Zufallsgrößen	104
2.3.8.1	Einleitung	104
2.3.8.2	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer mehrdimensionalen Zufallsgröße	105
2.3.8.3	Unabhängigkeit von Zufallsgrößen, Korrelationskoeffizient, Kovarianzmatrix	116
2.3.9	Funktionen von mehrdimensionalen Zufallsgrößen	120
2.3.9.1	Lineare Funktionen mehrdimensionaler stetiger Zufallsgrößen	120
2.3.9.2	Summen von unabhängigen Zufallsgrößen	124
2.3.9.3	Produkt und Quotient unabhängiger Zufallsgrößen	128
2.3.9.4	Grundverteilungen der mathematischen Statistik	129
2.3.10	Charakteristische Funktionen	132
2.3.10.1	Definition und Beispiele	132
2.3.10.2	Berechnung von Momenten	134
2.3.10.3	Der Multiplikationssatz	136
2.3.10.4	Erzeugende Funktionen	138
2.3.10.5	Weiterführende Betrachtungen	140
2.3.11	Grenzwertsätze	141
2.3.11.1	Gesetze der großen Zahlen	141
2.3.11.2	Der zentrale Grenzwertsatz	143
2.3.11.3	Weiterführende Bemerkungen	146
2.3.12	Aufgaben	148

3	Mathematische Statistik	151
3.1	Grundgesamtheit, Stichprobe	153
3.2	Statistische Schätzverfahren	168
3.2.1	Einleitung	168
3.2.2	Punktschätzungen	169
3.2.2.1	Begriff der Punktschätzung	169
3.2.2.2	Maximum-Likelihood-Methode	170
3.2.2.3	Momentenmethode	173
3.2.2.4	Eigenschaften von Punktschätzfunktionen	175
3.2.3	Konfidenzschätzungen	180
3.2.3.1	Begriff der Konfidenzschätzung	180
3.2.3.2	Konfidenzschätzung für den Erwartungswert einer normalverteilten Grundgesamtheit mit bekannter Varianz	182
3.2.3.3	Konfidenzschätzung für den Erwartungswert einer normalverteilten Grundgesamtheit mit unbekannter Varianz	185
3.2.3.4	Konfidenzschätzung für die Varianz einer normalverteilten Grundgesamtheit	187
3.2.3.5	Konfidenzschätzung für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit	189
3.2.3.6	Ergänzende Betrachtungen	192
3.3	Statistische Prüfverfahren	193
3.3.1	Problemstellung und Grundbegriffe	193
3.3.2	Prüfung des Erwartungswerts einer normalverteilten Grundgesamtheit mit bekannter Varianz	200
3.3.3	Prüfung des Erwartungswerts einer normalverteilten Grundgesamtheit mit unbekannter Varianz	202
3.3.4	Prüfen mit Überschreitungswahrscheinlichkeiten	204
3.3.5	Prüfung der Varianz einer normalverteilten Grundgesamtheit	206
3.3.6	Prüfung der Gleichheit der Erwartungswerte zweier unabhängiger normalverteilter Grundgesamtheiten	208
3.3.7	Prüfung der Gleichheit der Varianzen zweier unabhängiger normalverteilter Grundgesamtheiten	210
3.3.8	Prüfung einer Wahrscheinlichkeit	212
3.3.9	Anpassungstests	213
3.3.10	Einführung in verteilungsunabhängige Prüfverfahren	222
3.4	Regressions- und Korrelationsanalyse	228
3.4.1	Einführung	228
3.4.2	Regressionsanalyse	230
3.4.2.1	Schätzung der Parameter	232
3.4.2.2	Prüfung der Parameter; Konfidenzbereiche	236
3.4.3	Korrelationsanalyse	240

3.5	Aufgaben	244
	Lösungen der Aufgaben	247
	Anhang: Tafeln	252
	Literatur	257
	Sachregister	260