

Karl-Heinz Pfeffer

**Analysis
für Fachoberschulen**

Karl-Heinz Pfeffer

Analysis für Fachoberschulen

Ein Lehr- und Arbeitsbuch zur modernen Mathematik

Mit 220 Abbildungen
und mehr als 2000 Aufgaben

5., durchgesehene Auflage



Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme
Ein Titeldatensatz für diese Publikation ist bei
Der Deutschen Bibliothek erhältlich.

1. Auflage 1981
- 2., durchgesehene Auflage 1985
- 3., verbesserte Auflage 1988
- 4., verbesserte und erweiterte Auflage 1998
- 5., durchgesehene Auflage 2000

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 2000

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer.



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

www.vieweg.de

Konzeption und Layout des Umschlags: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de

Technische Redaktion: Wolfgang Nieger, Wiesbaden

Satz: Kníhtlačiareň Svornosť G.m.b.H., Bratislava
und Publishing Service Rolf-Erich Schulz, Dreieich

Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN 978-3-528-44006-0 ISBN 978-3-322-91907-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-91907-6

Vorwort

Das vorliegende Unterrichtswerk zur *Analysis* ist ein Lehr- und Arbeitsbuch für Fachoberschulen der Klassen 12.

Es berücksichtigt in besonderem Maße die unterschiedlichen mathematischen Vorkenntnisse der Fachoberschüler, indem wiederholende Inhalte angeboten werden, die je nach Bedarf mehr oder weniger selbständig von Schülerinnen und Schülern erarbeitet werden können. Aus diesem Grunde kann das Buch ebenso bereits in den 11. Klassen eingeführt werden und bietet sich darüberhinaus für jene Absolventen der Erwachsenenbildung an (Volkshochschulen etc.), welche die Fachhochschulreife erwerben möchten.

Analysis für Fachoberschulen entstammt der langjährigen Unterrichtspraxis des Verfassers an einer Fachoberschule Technik. Die entsprechende Orientierung am technischen und physikalischen Erfahrungsbereich der Lernenden ist dabei so erfolgt, daß eine Verwendung in den anderen Fachrichtungen (insbesondere Seefahrt und Agrarwirtschaft) ebenfalls gut möglich ist.

Wegen der spezifisch technischen Akzentuierung eröffnet sich auch ein Unterrichtseinsatz in einschlägigen Berufsoberschulen sowie in Fachgymnasien Technik.

Der didaktische Leitgedanke dieses Buches beinhaltet, *grundlegende* Kenntnisse über Funktionen zu vermitteln, ohne dabei die Theorie überzubewerten. Dazu gehört es, hinführend zu den klassischen Methoden der Analysis auch die hierfür wesentlichen elementaren Rechentechniken und geometrischen Denkweisen bereitzustellen und einzuüben.

Das geschieht zunächst einmal durch bewußt breit angelegte Überlegungen zu den linearen und quadratischen Funktionen, an die sich die einschlägigen Nullstellenermittlungen ganzrationaler Funktionen höheren Grades anschließen. Abgerundet wird die elementare Funktionenlehre durch wiederholende Betrachtung der trigonometrischen Grundfunktionen und mündet ein in die Erarbeitung der allgemeinen Sinusfunktion.

Dieser Einstieg in die Analysis, je nach Lerngruppe und Lernintention abkürzbar, hat den Vorteil, daß nach der sich anschließenden Erarbeitung des Grenzwertbegriffes über Folgen bzw. über Funktionen den Lernenden die Problemstellungen der Differential- und später auch der Integralrechnung durchsichtiger erscheinen: Grundsätzliche Vorgehensweisen werden wieder aufgegriffen (Wiederholungseffekt!) und gemäß Spiralprinzips in erweitertem Zusammenhang angewandt.

Besonders erwähnenswert ist, daß die Integralrechnung anschaulich über Flächeninhaltsfunktionen eingeführt wird.

Viele Beispielaufgaben mit Lösungen (►) erleichtern das selbständige Einüben des Stoffes. Das umfangreiche, zum großen Teil anwendungsbezogene Aufgabenmaterial ermöglicht handlungsorientierte Unterrichtsansätze, schülerorientierte Übungsphasen und intensive Vorbereitung auf Lernkontrollen. Die Aufgabenanordnung ist innerhalb derselben Thematik, soweit möglich, im Sinne einer methodischen Reihe schwierigkeitsgraddifferenziert erfolgt; besonders schwierige Aufgaben sind *kursiv* gekennzeichnet.

Die mit * versehenen Inhalte dienen der Abrundung. Sie können ohne Einfluß auf das weitere Vorgehen auch weggelassen werden bzw. ermöglichen den Einsatz des Unterrichtswerkes über den vom Titel her genannten Adressatenkreis hinaus.

Inhaltsverzeichnis

Mathematische Zeichen und Begriffe	X
---	----------

Analysis

1 Die reellen Zahlen	2
1.1 Die Grundeigenschaften der reellen Zahlen	2
1.1.1 Von den natürlichen zu den reellen Zahlen	2
Die natürlichen Zahlen	2
Ganze Zahlen	3
Rationale Zahlen	4
Irrationale Zahlen	7
Reelle Zahlen	9
1.1.2 Lagebeziehungen reeller Zahlen	14
Intervall, Umgebung, absoluter Betrag	
1.2 Das Rechnen in \mathbb{R}	17
1.2.1 Der binomische Satz	18
1.2.2 Gleichungen und Ungleichungen	23
Grundlagenwiederholung	23
Lineare Ungleichungen	27
Quadratische Gleichungen und Ungleichungen	31
Exponentialgleichungen	37
2 Funktionenlehre	41
2.1 Grundlagen	41
2.1.1 Paarmengen	41
2.1.2 Funktionen	44
Funktionen als Spezialfall von Relationen	44
Definitions- und Wertemenge	45
Schreibweise von Funktionen	45
2.2 Ausgewählte elementare Funktionen	50
2.2.1 Lineare Funktionen	50
Die Gerade als Graph linearer Funktionen	50
*Anwendung linearer Funktionen	56
Nullstellen linearer Funktionen	59
Schnittpunkt zweier Geraden	60
Schnittwinkel zweier Geraden – Orthogonalität	63
Erstellung linearer Funktionen	67
*Länge einer Strecke	73
*Mitte einer Strecke	74

2.2.2	Quadratische Funktionen	76
	Die Normalparabel	76
	Allgemeine Form der Scheitelgleichung	80
	Nullstellen quadratischer Funktionen	84
	Schnittpunkte Gerade – Parabel	88
	Schnittpunkte Parabel – Parabel	91
	Erstellung quadratischer Funktionen	92
*2.2.3	Lineare und quadratische Betragsfunktionen	95
2.2.4	Umkehrfunktionen (Umkehrrelationen)	97
2.2.5	Ganzrationale Funktionen	104
	Reine Potenzfunktionen	104
	Nullstellen ganzrationaler Funktionen	108
	Kurvenverlauf und Symmetrie	115
	*Das Hornerschema	119
2.3	Trigonometrische Funktionen (Kreisfunktionen)	123
2.3.1	Die Eigenschaften der trigonometrischen Grundfunktionen	124
	Das Bogenmaß eines Winkels	124
	Die Sinus- und Kosinusfunktion	125
	Die Tangens- und Kotangensfunktion	130
2.3.2	Die allgemeine Sinusfunktion	133
3	Folgen und Reihen	138
3.1	Grundlagen	138
3.1.1	Folge als Funktion	138
3.1.2	Schreibweise von Folgen	140
3.1.3	Eigenschaften von Folgen	142
3.1.4	Reihen	145
3.2	Spezielle (endliche) Folgen	147
3.2.1	Arithmetische Folgen und Reihen	147
	Das Bildungsgesetz	147
	Arithmetische Folgen als lineare Funktionen	149
	Die Summenformel der arithmetischen Reihe	150
	*Vollständige Induktion	152
3.2.2	Geometrische Folgen und Reihen	155
	Das Bildungsgesetz	155
	*Geometrische Folgen als Exponentialfunktionen	159
	Die Summenformel der geometrischen Reihe	162
*3.2.3	Zinseszinsrechnung	166
3.3	Grenzwert von Folgen	168
3.3.1	Unendliche geometrische Folgen und Reihen	168
	*Periodische Dezimalzahlen als Grenzwert unendlicher geometrischer Reihen	173
3.3.2	Verallgemeinerung des Grenzwertbegriffes	177
	Konvergenz ausgewählter nicht-geometrischer Folgen	177
	Definition des Grenzwertes und 1. Konvergenzkriterium	180

3.3.3	Das Rechnen mit Grenzwerten	181
	Grenzwertsätze	181
	Grenzwert von Quotientenfolgen	182
*3.4	Wachstum und Zerfall	183
3.4.1	Euler'sche Zahl und e-Funktion	183
3.4.2	Spezielle Anwendungsformen der e-Funktion	187
4	Grenzwert von Funktionen – Stetigkeit	191
4.1	Grenzwerte von Funktionen	191
4.1.1	Erfordernis diverser Grenzwertbetrachtungen	191
4.1.2	Rechnerischer Umgang mit Grenzwerten	194
*4.1.3	Anwendung auf Kurvenuntersuchungen einfacher gebrochen-rationaler Funktionen	202
4.2	Stetigkeit	211
4.2.1	Begriff der Stetigkeit	211
4.2.2	Globale Stetigkeit	215
5	Differentialrechnung	216
5.1	Das Tangentenproblem	216
5.1.1	Die Differenzenquotientenfunktion	216
5.1.2	Allgemeine Definition des Differentialquotienten	219
5.1.3	Einfache Differentiationsregeln	221
	Potenz-, Konstanten-, Summenregel	
*5.1.4	Differenzierbarkeit und Stetigkeit	229
*5.1.5	Anwendung in der Physik	231
5.2	Anwendung auf Kurvenuntersuchungen	234
5.2.1	Extremstellen von Funktionen – Krümmungsverhalten	235
5.2.2	Wendepunkte	239
5.2.3	Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen	243
5.3	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	251
6	Integralrechnung	260
6.1	Das bestimmte Integral	260
6.1.1	Das Flächenproblem	260
	Vorbemerkungen	260
	Flächeninhaltsfunktion	262
	Das bestimmte Integral als Operator	268
	Das bestimmte Integral für $f(x) < 0$	270
6.1.2	Die Berechnung des bestimmten Integrals ganzrationaler Funktionen	272
	Integrierbarkeit	272
	Integrationsregeln	273
	Fläche zwischen Funktionsgraph und x -Achse	277
	Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen	280
	Rotationsvolumen	284

*6.2	Die Integration als Umkehrung der Differentiation	285
6.2.1	Das bestimmte Integral als Funktion seiner oberen Grenze . . .	285
6.2.2	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	289
6.2.3	Die Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen	294
*7	Vertiefung der Differentialrechnung	297
7.1	Weitere Differentiationsregeln	297
7.1.1	Produktregel	297
7.1.2	Quotientenregel	298
7.1.3	Kettenregel	300
7.2	Kurvendiskussion gebrochen-rationaler Funktionen	304
7.3	Kurvendiskussion trigonometrischer Funktionen	313
7.3.1	Die Differentiation der trigonometrischen Grundfunktionen . . .	313
	Die Ableitungen des Sinus und Kosinus	315
	Die Ableitungen des Tangens und Kotangens	317
7.3.2	Zusammengesetzte trigonometrische Funktionen	318
Sachwortverzeichnis	322

Mathematische Zeichen und Begriffe

1 Logik

$:=$	<i>definitionsgemäß gleich</i> ; Kennzeichnung einer Definitionsgleichung, bei welcher der zu definierende Begriff auf der Seite des Doppelpunktes steht.
\wedge	<i>und</i> (im Sinne von sowohl ... als auch)
\vee	<i>oder</i> (im nicht-ausschließenden Sinn)
\Rightarrow	<i>daraus folgt</i> ; wenn ..., dann ($p \Rightarrow q$: Aus p folgt q , d. h. p ist hinreichende Bedingung für q und q ist notwendige Bedingung für p .)
\Leftrightarrow	<i>äquivalent</i> (gleichwertig); genau dann ..., wenn ($p \Leftrightarrow q$: Aus p folgt q und umgekehrt)

2 Relationen zwischen Zahlen

$a = b$	a gleich b	$a \neq b$	a ungleich b
$a < b$	a kleiner b	$a > b$	a größer b
$a \leq b$	a kleiner oder gleich b	$a \geq b$	a größer oder gleich b
$a \approx b$	a ungefähr gleich b		
$a \triangleq b$	a entspricht b (gebräuchlich z.B. bei Maßstabsangaben)		

3 Mengen

$A, B, C, \dots, M, N, \dots$	Mengen
$a \in M (M \ni a)$	a ist Element von M (M enthält a)
$a \notin M$	a ist nicht Element von M
$\{a, b, c, d\}$	Menge mit den Elementen a, b, c und d
$\{x \dots\}$	Menge aller x , für die gilt ...
$\{x \dots\}_M$	Menge aller $x \in M$, für die gilt ...
$\{\}$	leere Menge
$A = B$	A gleich B , d.h. $x \in A \Leftrightarrow x \in B$
$A \subset B (B \supset A)$	A ist (echte) Teilmenge von B , d.h. $x \in A \Rightarrow x \in B$ und $A \neq B$ (B ist (echte) Obermenge von A)
$A \subseteq B$	A ist echte oder unechte Teilmenge von B (d.h. $A \subset B$ oder $A = B$)

$A \not\subseteq B$	A ist nicht Teilmenge von B
$A \cap B := \{x x \in A \wedge x \in B\}$	A geschnitten B ; Schnittmenge (Durchschnitt) von A und B
$A \cup B := \{x x \in A \vee x \in B\}$	A vereinigt B ; Vereinigungsmenge von A und B
$B \setminus A := \{x x \in B \wedge x \notin A\}$	B ohne A ; Differenzmenge von B und A
$A'_B := \{x x \notin A\}_B$ für $A \subseteq B$	Ergänzungsmenge von A zu B , d.h. $A \cup A'_B = B$
$A \times B := \{(x; y) x \in A \wedge y \in B\}$	A kreuz B ; Paarmenge von A und B (kartesisches Produkt)

charakteristische Mengen

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$	Menge der natürlichen Zahlen einschl. 0
$\mathbb{Z} := \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$	Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{J} := \{x x \notin \mathbb{Q}\}_{\mathbb{R}}$	Menge der irrationalen Zahlen
\mathbb{R}^+	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	Menge der positiven reellen Zahlen einschl. 0
$\mathbb{R}^- := \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_0^+$	Menge der negativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$	Menge der reellen Zahlen ohne 0
$[a; b] := \{x a \leq x \leq b\}_{\mathbb{R}}$	geschlossenes Intervall
$]a; b[:= \{x a < x < b\}_{\mathbb{R}}$	offenes Intervall
$[a; b[:= \{x a \leq x < b\}_{\mathbb{R}}$	halboffene Intervalle
$]a; b] := \{x a < x \leq b\}_{\mathbb{R}}$	
$ x := \begin{cases} +x & \text{für } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ -x & \text{für } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$	Betrag einer (reellen) Zahl x

4 Funktionen

\rightarrow	Zahlen- und Mengenzuordnungspfeil
R	Relation als Teilmenge eines kartesischen Produkts
f (auch g oder h)	Funktion als Spezialfall einer Relation
$f: x \rightarrow f(x)$	Funktionsvorschrift
$f(x)$	Funktionswert (Bild von x); aber auch Funktionsterm
$y = f(x)$	Funktionsgleichung
$f: \begin{cases} D \rightarrow W \\ x \rightarrow f(x) \end{cases}$	Funktion f mit Definitionsmenge D und Wertmenge W

$f^{-1}(R^{-1})$	Umkehrfunktion (Umkehrrelation)
$G_f \ni P$	Graph von f (Punktmenge) mit dem Punkt $P(x/y)$
\equiv	Identitätszeichen („ist identisch gleich“); z.B. Parabel $P \equiv y = x^2$
(a_n)	<i>Folge</i> mit den Gliedern $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ (Folge als Funktion mit $D \subseteq \mathbb{N}$)
$f', f'', f''', \dots, f^{(n)}$	1., 2., 3., ..., n -te Ableitungsfunktion von f
$f \circ g$ ($g \circ f$)	Verknüpfungszeichen für verkettete Funktionen (f nach g bzw. g nach f)

5 Weitere Zeichen

∞	unendlich
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	Grenzwert einer Folge für n gegen ∞
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	Grenzwert einer Funktion f für x gegen x_0
$\sum_{k=1}^n a_k$	Summationssymbol: $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$
$\int_a^b f(x) dx$	<i>bestimmtes</i> Integral der Funktion f über $[a; b]$
$\int f(x) dx$	<i>unbestimmtes</i> Integral der Funktion f
$F(x) = \int f(x) dx$	<i>Stammfunktionen</i> von f mit $F'(x) = f(x)$.

6 Wichtige Begriffe

<i>Definition</i>	Die Bedeutung eines verwendeten Namens oder Zeichens wird erklärt bzw. festgelegt.
<i>Axiom</i>	Anerkannter, nicht beweisbarer Grundsatz, aus dem sich <i>Sätze</i> ableiten lassen.
<i>Satz</i>	Unter Beachtung der Gesetze der Logik werden aus bereits bekannten Aussagen Schlußfolgerungen (Behauptungen) gezogen, die es zu beweisen gilt. – Zur Beweisführung darf auf eine entsprechende Definition zurückgegriffen werden.