Karl-Heinz Pfeffer

Analysis
für Fachoberschulen

Karl-Heinz Pfeffer

Analysis für Fachoberschulen

Ein Lehr- und Arbeitsbuch zur modernen Mathematik

Mit 220 Abbildungen
und mehr als 2000 Aufgaben

5., durchgesehene Auflage

vieweg

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme
Ein Titeldatensatz für diese Publikation ist bei
Der Deutschen Bibliothek erhältlich.

1. Auflage 1981
2., durchgesehene Auflage 1985
3., verbesserte Auflage 1988
4., verbesserte und erweiterte Auflage 1998
5., durchgesehene Auflage 2000

Der Verlag Vieweg ist ein Unternehmen der Fachverlagsgruppe BertelsmannSpringer.

www.vieweg.de

Konzeption und Layout des Umschlags: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de
Technische Redaktion: Wolfgang Nieger, Wiesbaden
Satz: Kníhtlačiareň Svornosť G.m.b.H., Bratislava
und Publishing Service Rolf-Erich Schulz, Dreieich

Gedruckt auf säurefreiem Papier

ISBN 978-3-528-44006-0 ISBN 978-3-322-91907-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-91907-6

Vorwort

Das vorliegende Unterrichtswerk zur *Analysis* ist ein Lehr- und Arbeitsbuch für Fachoberschulen der Klassen 12.

Es berücksichtigt in besonderem Maße die unterschiedlichen mathematischen Vorkenntnisse der Fachoberschüler, indem wiederholende Inhalte angeboten werden, die je nach Bedarf mehr oder weniger selbständig von Schülerinnen und Schülern erarbeitet werden können. Aus diesem Grunde kann das Buch ebensogut bereits in den 11. Klassen eingeführt werden und bietet sich darüberhinaus für jene Absolventen der Erwachsenenbildung an (Volkshochschulen etc.), welche die Fachhochschulreife erwerben möchten.

Analysis für Fachoberschulen entstammt der langjährigen Unterrichtspraxis des Verfassers an einer Fachoberschule Technik. Die entsprechende Orientierung am technischen und physikalischen Erfahrungs- bzw. Erlebnisbereich der Lernenden ist dabei so erfolgt, daß eine Verwendung in den anderen Fachrichtungen (insbesondere Seefahrt und Agrarwirtschaft) ebenfalls gut möglich ist.

Wegen der spezifisch technischen Akzentuierung eröffnet sich auch ein Unterrichtseinsatz in einschlägigen Berufsoberschulen sowie in Fachgymnasien Technik.

Der didaktische Leitgedanke dieses Buches beinhaltet, *grundlegende* Kenntnisse über Funktionen zu vermitteln, ohne dabei die Theorie überzubewerten. Dazu gehört es, hinführend zu den klassischen Methoden der Analysis auch die hierfür wesentlichen elementaren Rechentechniken und geometrischen Denkweisen bereitzustellen und einzuüben.

Das geschieht zunächst einmal durch bewußt breit angelegte Überlegungen zu den linearen und quadratischen Funktionen, an die sich die einschlägigen Nullstellenermittlungen ganzrationaler Funktionen höheren Grades anschließen. Abgerundet wird die elementare Funktionenlehre durch wiederholende Betrachtung der trigonometrischen Grundfunktionen und mündet ein in die Erarbeitung der allgemeinen Sinusfunktion.

Dieser Einstieg in die Analysis, je nach Lerngruppe und Lernintention abkürzbar, hat den Vorteil, daß nach der sich anschließenden Erarbeitung des Grenzwertbegriffes über Folgen bzw. über Funktionen den Lernenden die Problemstellungen der Differential- und später auch der Integralrechnung durchsichtiger erscheinen: Grundsätzliche Vorgehensweisen werden wieder aufgegriffen (Wiederholungseffekt!) und gemäß Spiralprinzips in erweitertem Zusammenhang angewandt.

Besonders erwähnenswert ist, daß die Integralrechnung anschaulich über Flächeninhaltsfunktionen eingeführt wird.

Viele Beispielaufgaben mit Lösungen (▶) erleichtern das selbständige Einüben des Stoffes. Das umfangreiche, zum großen Teil anwendungsbezogene Aufgabenmaterial ermöglicht handlungsorientierte Unterrichtsansätze, schülerorientierte Übungsphasen und intensive Vorbereitung auf Lernkontrollen. Die Aufgabenanordnung ist innerhalb derselben Thematik, soweit möglich, im Sinne einer methodischen Reihe schwierigkeitsgraddifferenziert erfolgt; besonders schwierige Aufgaben sind *kursiv* gekennzeichnet.

Die mit * versehenen Inhalte dienen der Abrundung. Sie können ohne Einfluß auf das weitere Vorgehen auch weggelassen werden bzw. ermöglichen den Einsatz des Unterrichtswerkes über den vom Titel her genannten Adressatenkreis hinaus.

Hannover, im Januar 1997 *Karl-Heinz Pfeffer*

Inhaltsverzeichnis

Mathematische Zeichen und Begriffe

1 Logik

$:=$	*definitionsgemäß gleich*; Kennzeichnung einer Definitionsgleichung, bei welcher der zu definierende Begriff auf der Seite des Doppelpunktes steht.
$\wedge$	*und* (im Sinne von sowohl ... als auch)
$\vee$	*oder* (im nicht-ausschließenden Sinn)
$\Rightarrow$	*daraus folgt*; wenn ..., dann ($p \Rightarrow q$: Aus p folgt q, d.h. p ist hinreichende Bedingung für q und q ist notwendige Bedingung für p.)
$\Leftrightarrow$	*äquivalent* (gleichwertig); genau dann ..., wenn ($p \Leftrightarrow q$: Aus p folgt q und umgekehrt)

2 Relationen zwischen Zahlen

$a = b$	a gleich b	$a \neq b$	a ungleich b
$a < b$	a kleiner b	$a > b$	a größer b
$a \leqslant b$	a kleiner oder gleich b	$a \geqslant b$	a größer oder gleich b
$a \approx b$	a ungefähr gleich b		
$a \triangleq b$	a entspricht b (gebräuchlich z.B. bei Maßstabsangaben)		

3 Mengen

$A, B, C, \ldots, M, N, \ldots$	Mengen
$a \in M \; (M \ni a)$	a ist Element von M (M enthält a)
$a \notin M$	a ist nicht Element von M
$\{a, b, c, d\}$	Menge mit den Elementen a, b, c und d
$\{x \mid \ldots\}$	Menge aller x, für die gilt ...
$\{x \mid \ldots\}_M$	Menge aller $x \in M$, für die gilt ...
$\{\,\}$	leere Menge
$A = B$	A gleich B, d.h. $x \in A \Leftrightarrow x \in B$
$A \subset B \; (B \supset A)$	A ist (echte) Teilmenge von B, d.h. $x \in A \Rightarrow x \in B$ und $A \neq B$ (B ist (echte) Obermenge von A)
$A \subseteq B$	A ist echte oder unechte Teilmenge von B (d.h. $A \subset B$ oder $A = B$)

$A \nsubseteq B$	A ist nicht Teilmenge von B
$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	*A geschnitten B*; Schnittmenge (Durchschnitt) von A und B
$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	*A vereinigt B*; Vereinigungsmenge von A und B
$B \setminus A := \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$	*B ohne A*; Differenzmenge von B und A
$A'_B := \{x \mid x \notin A\}_B$ für $A \subseteq B$	Ergänzungsmenge von A zu B, d.h. $A \cup A'_B = B$
$A \times B := \{(x; y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$	*A kreuz B*; Paarmenge von A und B (kartesisches Produkt)

charakteristische Mengen

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$	Menge der natürlichen Zahlen einschl. 0
$\mathbb{Z} := \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q} := \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{J} := \{x \mid x \notin \mathbb{Q}\}_{\mathbb{R}}$	Menge der irrationalen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	Menge der positiven reellen Zahlen einschl. 0
$\mathbb{R}^- := \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_0^+$	Menge der negativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$	Menge der reellen Zahlen ohne 0
$[a; b] := \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}_{\mathbb{R}}$	geschlossenes Intervall
$]a; b[:= \{x \mid a < x < b\}_{\mathbb{R}}$	offenes Intervall
$\left.\begin{array}{l}[a; b[:= \{x \mid a \leqslant x < b\}_{\mathbb{R}} \\ ]a; b] := \{x \mid a < x \leqslant b\}_{\mathbb{R}}\end{array}\right\}$	halboffene Intervalle
$\lvert x \rvert := \begin{cases} +x & \text{für } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ -x & \text{für } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$	*Betrag* einer (reellen) Zahl x

4 Funktionen

$\rightarrow$	Zahlen- und Mengenzuordnungspfeil
R	*Relation* als Teilmenge eines kartesischen Produkts
f (auch g oder h)	*Funktion* als Spezialfall einer Relation
$f: x \rightarrow f(x)$	Funktionsvorschrift
$f(x)$	Funktionswert (Bild von x); aber auch Funktionsterm
$y = f(x)$	Funktionsgleichung
$f: \begin{cases} D \rightarrow W \\ x \rightarrow f(x) \end{cases}$	Funktion f mit Definitionsmenge D und Wertmenge W

$f^{-1}(R^{-1})$	Umkehrfunktion (Umkehrrelation)
$G_f \ni P$	Graph von f (Punktmenge) mit dem Punkt $P(x/y)$
$\equiv$	Identitätszeichen („ist identisch gleich“); z.B. Parabel $P \equiv y = x^2$
(a_n)	*Folge* mit den Gliedern $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ (Folge als Funktion mit $D \subseteq \mathbb{N}$)
$f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}$	1., 2., 3., ..., n-te Ableitungsfunktion von f
$f \circ g \ (g \circ f)$	Verknüpfungszeichen für verkettete Funktionen (f nach g bzw. g nach f)

5 Weitere Zeichen

∞	unendlich
$\lim\limits_{n \to \infty} a_n$	Grenzwert einer Folge für n gegen ∞
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	Grenzwert einer Funktion f für x gegen x_0
$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$	Summationssymbol: $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$
$\int\limits_a^b f(x)\,dx$	*bestimmtes* Integral der Funktion f über $[a; b]$
$\int f(x)\,dx$	*unbestimmtes* Integral der Funktion f
$F(x) = \int f(x)\,dx$	*Stammfunktionen* von f mit $F'(x) = f(x)$.

6 Wichtige Begriffe

Definition	Die Bedeutung eines verwendeten Namens oder Zeichens wird erklärt bzw. festgelegt.
Axiom	Anerkannter, nicht beweisbarer Grundsatz, aus dem sich *Sätze* ableiten lassen.
Satz	Unter Beachtung der Gesetze der Logik werden aus bereits bekannten Aussagen Schlußfolgerungen (Behauptungen) gezogen, die es zu beweisen gilt. – Zur Beweisführung darf auf eine entsprechende Definition zurückgegriffen werden.