

Einstieg in die Wirtschaftsmathematik

Von Prof. Dr. rer. nat. habil. Bernd Luderer
und Dr. rer. nat. Uwe Würker
Techn. Universität Chemnitz-Zwickau

2., durchgesehene Auflage
Mit zahlreichen Abbildungen, anwendungsorientierten
Beispielen und Übungsaufgaben mit Lösungen



B. G. Teubner Stuttgart 1997

Prof. Dr. rer. nat. habil. Bernd Luderer

Geboren 1949 in Chemnitz. Von 1967 bis 1972 Studium der Mathematik, 1972 Diplom an der TH Karl-Marx-Stadt. Von 1972 bis 1975 Aspirantur, 1976 Promotion an der Lomonossow-Universität Moskau. 1975 wiss. Assistent, 1979 Oberassistent TU Karl-Marx-Stadt. Studienaufenthalte 1980 Banachzentrum Warschau, 1983 Lomonossow-Universität Moskau. 1988 Habilitation, 1989 Dozent, 1992 Professor TU Chemnitz-Zwickau.

Dr. rer. nat. Uwe Würker

Geboren 1963 in Glauchau/Sa. Von 1982 bis 1987 Studium der Mathematik, 1987 Diplom an der TU Karl-Marx-Stadt. Von 1987 bis 1990 Forschungsstudium, 1991 Promotion, 1990 wiss. Assistent an der TU Chemnitz-Zwickau.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Luderer, Bernd:

Einstieg in die Wirtschaftsmathematik : mit
anwendungsorientierten Beispielen und Übungsaufgaben mit
Lösungen / von Bernd Luderer und Uwe Würker. – 2., durchges.
Aufl. – Stuttgart : Teubner, 1997

(Teubner-Studienbücher : Mathematik)

ISBN 978-3-519-12098-8 ISBN 978-3-322-91880-2 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-91880-2

NE: Würker, Uwe:

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt besonders für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

© B. G. Teubner Stuttgart 1995

Für Ludmila und Swetlana

Für meine Eltern

Vorwort zur 2. Auflage

Mathematik als propädeutisches Fach am Beginn eines wirtschaftswissenschaftlichen Studiums: Was soll gelehrt werden? Wie soll gelehrt werden? Wie umfangreich darf oder muß der Inhalt sein? Soviele Personen, so viele Meinungen wird es dazu geben. Bei der Konzeption des vorliegenden Buches und somit bei der Beantwortung der aufgeworfenen Fragen sind wir von unseren langjährigen Lehrerfahrungen im Fach Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler an der Technischen Universität Chemnitz-Zwickau ausgegangen und zu folgenden, in diesem Lehrbuch realisierten Positionen gekommen:

- **Mathematik muß verständlich, aber korrekt gelehrt werden.** Will heißen: Im Vordergrund steht der „Normalfall“ einer Formel, eines Algorithmus, einer mathematischen Aussage; Sonderfälle, Entartungen, notwendige Voraussetzungen werden besprochen, aber nicht in den Vordergrund geschoben.
- **Ein Wirtschaftswissenschaftler soll Mathematik anwenden.** Will heißen: Er muß wissen, was Mathematik ist und kann. Er muß wichtige mathematische Begriffe kennen und sicher beherrschen. Er muß fundamentale Lösungsmethoden kennen und an kleinen Beispielen ausprobiert haben, um deren wichtigste Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten nutzen und ihre Grenzen einschätzen zu können. Er muß gewisse Fertigkeiten im Umgang mit der Mathematik als „Handwerkszeug“ für wirtschaftswissenschaftliche Untersuchungen erwerben. Er soll aber nicht unbedingt die mathematische Theorie weiterentwickeln. Deshalb stehen auch die Demonstration mathematischer Aussagen an Beispielen im Vordergrund, während Beweise sehr kurz wegkommen und nur exemplarischen Einblick in mathematische Denkweisen gewähren. Ein Wirtschaftswissenschaftler muß sich aber dessen bewußt sein, daß man Mathematik niemals bedenkenlos anwenden darf, daß man — wie in jeder Wissenschaft — an bestimmte Gültigkeitsvoraussetzungen gebunden ist.
- **Die Anwendung mathematischer Methoden in Wirtschaftswissenschaft und –praxis geht vom Wirtschaftswissenschaftler aus.** Will heißen: Der zukünftige Absolvent muß neben profunder Kenntnis seines Faches und grundlegenden Kenntnissen in Mathematik in der Lage sein, ökonomische Probleme in der Sprache der Mathematik zu formulieren, er muß abschätzen können, inwieweit die Mathematik zur Lösung oder Lösungsunterstützung des betreffenden Problems beitragen kann, und er muß die mittels mathematischer Methoden erhaltenen Resultate ökonomisch interpretieren und umsetzen können. In der Praxis wird er hierbei natürlich vom Mathematiker nicht im Stich gelassen. Diesem Ziel dienen im Buch die Untersuchung der vielfältigsten wirtschaftswissenschaftlichen Fragestellungen und ihre Umsetzung in mathematische Formulierungen — kurzum, die Modellierung komplexer Sachverhalte.
- **Ein Wirtschaftswissenschaftler sollte von der Wichtigkeit der Mathematik überzeugt sein.** Will heißen: Er muß sehen, wo und wie ihm

mathematische Lösungsmethoden bei der Untersuchung der ihn interessierenden Fragen helfen können. Dieses Anliegen wird im Buch dadurch realisiert, daß die behandelten mathematischen Themen an vielen Anwendungsbeispielen illustriert werden und daß großer Wert auf die Interpretation der erzielten Ergebnisse gelegt wird.

Die Darlegungen des Buches berücksichtigen natürlich, daß ein Student im 1. Semester noch kein fertig ausgebildeter Wirtschaftswissenschaftler ist. Deshalb werden sehr spezielle Fachtermini vermieden. Zur Anregung der selbständigen Beschäftigung mit dem behandelten Stoff werden dafür eine große Zahl an Übungsaufgaben gestellt, von denen in der Regel auch die Lösungen im Anhang zu finden sind. Schließlich ist die Vielzahl im Buch enthaltener Abbildungen dazu gedacht, das Vorstellungsvermögen anzuregen und zu verbessern.

Das vorliegende Lehrbuch vereint gewissermaßen **drei Bücher in einem**: einen **Vorkurs** zum Erwerb oder zur Festigung von Abiturkenntnissen, den eigentlichen **Grundkurs** Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, der die Gebiete Lineare Algebra, Lineare Optimierung und Analysis mehrerer Veränderlicher umfaßt, sowie eine relativ umfangreiche Einführung in die **Finanzmathematik**. Nicht unerwähnt sollte bleiben, daß das Buch so angelegt ist, daß es sich auch vorzüglich zum Selbststudium eignet.

Erfreulicherweise stieß die erste Ausgabe auf eine rege Nachfrage, so daß bereits nach relativ kurzer Zeit eine neue Auflage notwendig wurde. Wesentliche inhaltliche Änderungen erschienen uns dabei nicht erforderlich, jedoch haben wir das gesamte Buch einer nochmaligen kritischen Durchsicht unterzogen und einige Schreibfehler korrigiert.

Die berechtigten Wünsche vieler Studenten nach noch mehr Übungsaufgaben veranlaßten uns, ein entsprechendes **Ergänzungsbuch** herauszubringen, das mit seiner Fülle von komplett durchgerechneten und ausführlich kommentierten typischen Beispielen, Formeln und anwendungsbezogenen Aufgaben (mit Lösungen im Anhang!) den interessierten Leser Schritt für Schritt zur praktischen Beherrschung des Lehrbuchstoffes befähigt:

Luderer, B., Paape, C. und Würker U.: Arbeits- und Übungsbuch
Wirtschaftsmathematik, Beispiele — Aufgaben — Formeln, B. G.
Teubner Stuttgart 1996, ISBN 3-519-02573-6.

Wir hoffen auf weitere positive Aufnahme des Lehrbuches durch die Leser und sind für konstruktive Hinweise und Anregungen, die zu seiner Verbesserung beitragen, dankbar.

Bernd Luderer, Uwe Würker

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
Zeichenerklärung	12
1 Grundlagen	13
1.1 Instrumente der Elementarmathematik	13
1.1.1 Zahlbereiche. Zahlendarstellung	13
1.1.2 Rechnen mit Zahlen	15
1.1.3 Bruchrechnung	18
1.1.4 Potenzrechnung	20
1.1.5 Binomische Formeln. Partialdivision	22
1.1.6 Wurzelrechnung	26
1.1.7 Logarithmenrechnung	27
1.1.8 Rechenregeln und Auflösung von Gleichungen	29
1.1.9 Koordinatensysteme	33
1.1.10 Winkelbeziehungen	35
1.1.11 Komplexe Zahlen	36
1.2 Darstellung von Funktionen einer Variablen	38
1.2.1 Formen der Darstellung	40
1.2.2 Operationen mit Funktionen	41
1.2.3 Wichtige spezielle Funktionen	44
1.3 Ergänzende Fragen	57
1.3.1 Intervalle	57
1.3.2 Auflösung von Ungleichungen	58
1.3.3 Absolute Beträge	60
1.4 Analytische Geometrie	62
1.4.1 Geradengleichungen in der Ebene	62
1.4.2 Geraden und Ebenen im Raum	67
1.4.3 Graphische Darstellung von Ungleichungssystemen	69
1.5 Zahlenfolgen und Zahlenreihen	71
1.5.1 Grundbegriffe	71
1.5.2 Arithmetische Folgen und Reihen	72
1.5.3 Geometrische Folgen und Reihen	73

2	Logik und Mengenlehre	75
2.1	Aussagenlogik	75
2.1.1	Aussagen	75
2.1.2	Aussagenverbindungen	77
2.1.3	Quantoren	80
2.1.4	Einfache Schlußweisen	81
2.2	Mengenlehre	83
2.2.1	Grundbegriffe	83
2.2.2	Mengenrelationen	85
2.2.3	Mengenoperationen	86
2.2.4	Abbildungen und Funktionen	88
3	Finanzmathematik	92
3.1	Zins- und Zinseszinsrechnung	92
3.1.1	Einfache Verzinsung	93
3.1.2	Zinseszinsrechnung	96
3.1.3	Grundaufgaben der Zinseszinsrechnung	97
3.1.4	Kapitalwertmethode	99
3.1.5	Gemischte Verzinsung	100
3.1.6	Unterjährige Verzinsung	102
3.2	Rentenrechnung	104
3.2.1	Grundbegriffe der Rentenrechnung	104
3.2.2	Vorschüssige Renten	105
3.2.3	Nachschüssige Renten	106
3.2.4	Grundaufgaben der Rentenrechnung	108
3.2.5	Ewige Rente	109
3.3	Tilgungsrechnung	111
3.3.1	Grundbegriffe. Formen der Tilgung	111
3.3.2	Ratentilgung	112
3.3.3	Annuitätentilgung	113
3.3.4	Tilgungspläne	115
3.4	Renditerechnung	116
4	Lineare Algebra	121
4.1	Matrizen. Vektoren. Vektorräume	121
4.1.1	Begriff der Matrix	121
4.1.2	Spezielle Matrizen	122
4.1.3	Matrizenrelationen	125
4.1.4	Operationen mit Matrizen	126
4.2	Matrizenmultiplikation	130
4.2.1	Skalarprodukt	130

4.2.2	Produkt von Matrizen	131
4.2.3	Eigenschaften der Matrizenmultiplikation	133
4.2.4	Anwendungen der Matrizenmultiplikation	134
4.3	Lineare Gleichungssysteme (LGS)	141
4.3.1	Begriff des linearen Gleichungssystems	141
4.3.2	Darstellungsformen von LGS	142
4.3.3	Begriff der Lösung eines LGS	144
4.3.4	Lineare Gleichungssysteme mit Einheitsmatrix	146
4.3.5	Elementare Umformungen eines LGS	148
4.4	Gaußscher Algorithmus	148
4.4.1	Anwendung elementarer Umformungen	149
4.4.2	Ablaufplan des Gaußschen Algorithmus	152
4.4.3	Lösungsdarstellung	153
4.4.4	Numerische Aspekte	155
4.4.5	Zusammenfassende Bemerkungen	156
4.5	Lineare Unabhängigkeit	158
4.5.1	Linearkombination	159
4.5.2	Begriff der linearen Unabhängigkeit	161
4.5.3	Basis und Rang	164
4.5.4	Zur Lösungsstruktur linearer Gleichungssysteme	167
4.6	Matrizeninversion	169
4.6.1	Definition der inversen Matrix	169
4.6.2	Anwendungen der Matrizeninversion	172
4.7	Determinanten	177
4.7.1	Definition der Determinante	177
4.7.2	Eigenschaften von Determinanten	180
4.7.3	Anwendungen der Determinantenrechnung	183
4.7.4	Definitheit von Matrizen	185
4.7.5	Zusammenfassende Bemerkungen	187
5	Lineare Optimierung	189
5.1	Gegenstand der Linearen Optimierung	190
5.1.1	Betrachtung einer Modellsituation	191
5.1.2	Bestandteile einer LOA. Lösungsbegriff	192
5.2	Modellierung und graphische Lösung von LOA	194
5.2.1	Modellierung typischer Problemstellungen	195
5.2.2	Graphische Lösung von LOA	201
5.3	Theorie der Linearen Optimierung	211
5.3.1	Überführung in die Gleichungsform	211
5.3.2	Basislösungen und Eckpunkte	216

5.3.3	Eigenschaften von LOA	219
5.4	Simplexmethode für Optimierungsaufgaben in Gleichungsform . .	220
5.4.1	Grundidee	220
5.4.2	Auswahl der aufzunehmenden Basisvariablen	223
5.4.3	Auswahl der auszuschließenden Basisvariablen	225
5.4.4	Ablaufplan des Simplexalgorithmus	227
5.4.5	Beispiele. Rechenkontrollen	230
5.4.6	Sonderfälle	234
5.5	Zwei-Phasen-Methode	237
5.5.1	Grundidee	238
5.5.2	Mögliche Fälle	239
5.5.3	Beispiele	241
5.6	Dualität in der Linearen Optimierung	243
5.6.1	Konstruktion der dualen Aufgabe	244
5.6.2	Dualitätsbeziehungen	246
5.6.3	Ökonomische Interpretation der Dualvariablen	249
6	Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen	255
6.1	Grenzwert und Stetigkeit	255
6.1.1	Grenzwerte von Zahlenfolgen	256
6.1.2	Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen	259
6.1.3	Stetigkeit	261
6.1.4	Eigenschaften stetiger Funktionen	263
6.2	Differenzen- und Differentialquotient	264
6.2.1	Der Begriff des Differentialquotienten	266
6.2.2	Differential	269
6.2.3	Differentiationsregeln. Höhere Ableitungen	270
6.3	Charakterisierung von Funktionen mittels Ableitungen	274
6.3.1	Monotonie und Beschränktheit	274
6.3.2	Extremwerte	277
6.3.3	Wendepunkte. Krümmungsverhalten	281
6.3.4	Kurvendiskussion	285
6.3.5	Beispiele zur Kurvendiskussion	287
6.3.6	Anwendungen in der Marginalanalyse	291
6.4	Numerische Methoden der Nullstellenberechnung	297
6.4.1	Intervallhalbierung	298
6.4.2	Sekantenverfahren. Regula falsi	300
6.4.3	Newtonverfahren	301

7 Funktionen mehrerer Veränderlicher	303
7.1 Begriff und Beispiele	303
7.1.1 Funktionsbegriff	303
7.1.2 Beispiele für Funktionen mehrerer Veränderlicher	305
7.2 Grenzwert und Stetigkeit	308
7.3 Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlicher	314
7.3.1 Begriff der Differenzierbarkeit	314
7.3.2 Partielle Ableitungen und Elastizitäten	315
7.3.3 Gradient einer Funktion. Verschiedene Interpretationen	319
7.3.4 Partielle Ableitungen höherer Ordnung. Hessian	323
7.3.5 Vollständiges Differential	324
7.3.6 Implizite Funktionen	326
8 Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher	331
8.1 Extremwerte ohne Nebenbedingungen	331
8.1.1 Notwendige und hinreichende Extremwertbedingungen	332
8.1.2 Beispiele	336
8.2 Extremwerte unter Nebenbedingungen	338
8.2.1 Allgemeine Aufgabenformulierung	339
8.2.2 Die Eliminationsmethode	340
8.2.3 Lagrange-Methode	346
8.2.4 Interpretation der Lagrangeschen Multiplikatoren	354
8.3 Methode der kleinsten Quadrate	355
8.3.1 Problemstellung. Lineare Regression	355
8.3.2 Allgemeinere Ansatzfunktionen	362
9 Integralrechnung	365
9.1 Das unbestimmte Integral	366
9.1.1 Integration von Funktionen einer Veränderlichen	366
9.1.2 Integrationsregeln	367
9.2 Das bestimmte Integral	369
9.2.1 Integralbegriff für Funktionen einer Variablen	369
9.2.2 Integrierbarkeit. Eigenschaften bestimmter Integrale	371
9.2.3 Numerische Integration	373
9.2.4 Uneigentliche Integrale	376
9.2.5 Doppelintegral	378
9.3 Anwendungen der Integralrechnung	380
A Lösungen zu den Aufgaben	384
B Klausurbeispiel	403
Literaturverzeichnis	409
Sachverzeichnis	410

Zeichenerklärung

\mathbb{N}	– Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{Z}	– Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{Q}	– Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{R}	– Menge der reellen Zahlen
\mathbb{C}	– Menge der komplexen Zahlen
\mathbb{R}^+	– Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
\mathbb{R}^n	– Menge der n -dimensionalen Vektoren bzw. n -Tupel reeller Zahlen
$ x $	– absoluter Betrag der reellen Zahl x
$\ x\ $	– Norm des Vektors x
$\stackrel{!}{=}; \stackrel{\text{def}}{=}$	– Gleichheit per Forderung; Gleichheit per Definition
\iff	– Äquivalenz von Aussagen; genau dann, wenn
\implies	– Implikation; aus ... folgt ...
\forall	– für alle; für beliebige
\exists	– es existiert; es gibt
\emptyset	– leere Menge
$\{x \mid E(x)\}$	– Menge aller Elemente x mit der Eigenschaft $E(x)$
p	– Zinssatz, Zinsfuß
i	– Zinsrate; imaginäre Einheit
q	– Aufzinsungsfaktor
K_t	– Kapital zum Zeitpunkt t
$B_n^{\text{vor}}, B_n^{\text{nach}}$	– Barwert der vorschüssigen (nachsüssigen) Rente
$E_n^{\text{vor}}, E_n^{\text{nach}}$	– Endwert der vorschüssigen (nachsüssigen) Rente
S_k	– Restschuld am Ende der k -ten Periode
A_k	– Annuität in der k -ten Periode
Z_k	– Zinsen in der k -ten Periode
T_k	– Tilgung in der k -ten Periode
A^{-1}	– inverse Matrix
A^T	– transponierte Matrix
$\text{rang } A$	– Rang der Matrix A
$\det A, A $	– Determinante der Matrix A
$\langle a, b \rangle$	– Skalarprodukt der Vektoren a und b
E, e_j	– Einheitsmatrix, j -ter Einheitsvektor
x_B, x_N	– Vektor der Basisvariablen (Nichtbasisvariablen)
Δ_j	– Optimalitätsindikatoren
$\frac{\partial f}{\partial x_j}, f_{x_j}$	– partielle Ableitungen erster Ordnung
$\nabla f(x)$	– Gradient der Funktion f im Punkt x
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, f_{x_i x_j}$	– partielle Ableitungen zweiter Ordnung
$H_f(x)$	– Hessematrix der Funktion f im Punkt x
ε_{f, x_i}	– (partielle) Elastizität von f