Einstieg in die Wirtschaftsmathematik

Von Prof. Dr. rer. nat. habil. Bernd Luderer
und Dr. rer. nat. Uwe Würker
Techn. Universität Chemnitz-Zwickau

2., durchgesehene Auflage
Mit zahlreichen Abbildungen, anwendungsorientierten Beispielen und Übungsaufgaben mit Lösungen

B. G. Teubner Stuttgart 1997

Prof. Dr. rer. nat. habil. Bernd Luderer

Geboren 1949 in Chemnitz. Von 1967 bis 1972 Studium der Mathematik, 1972 Diplom an der TH Karl-Marx-Stadt. Von 1972 bis 1975 Aspirantur, 1976 Promotion an der Lomonossow-Universität Moskau. 1975 wiss. Assistent, 1979 Oberassistent TU Karl-Marx-Stadt. Studienaufenthalte 1980 Banachzentrum Warschau, 1983 Lomonossow-Universität Moskau. 1988 Habilitation, 1989 Dozent, 1992 Professor TU Chemnitz-Zwickau.

Dr. rer. nat. Uwe Würker

Geboren 1963 in Glauchau/Sa. Von 1982 bis 1987 Studium der Mathematik, 1987 Diplom an der TU Karl-Marx-Stadt. Von 1987 bis 1990 Forschungsstudium, 1991 Promotion, 1990 wiss. Assistent an der TU Chemnitz-Zwickau.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Luderer, Bernd:
Einstieg in die Wirtschaftsmathematik : mit anwendungsorientierten Beispielen und Übungsaufgaben mit Lösungen / von Bernd Luderer und Uwe Würker. – 2., durchges. Aufl. – Stuttgart : Teubner, 1997
(Teubner-Studienbücher : Mathematik)
ISBN 978-3-519-12098-8 ISBN 978-3-322-91880-2 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-91880-2

NE: Würker, Uwe:

Für Ludmila und Swetlana

Für meine Eltern

Vorwort zur 2. Auflage

Mathematik als propädeutisches Fach am Beginn eines wirtschaftswissenschaftlichen Studiums: Was soll gelehrt werden? Wie soll gelehrt werden? Wie umfangreich darf oder muß der Inhalt sein? Soviele Personen, soviele Meinungen wird es dazu geben. Bei der Konzeption des vorliegenden Buches und somit bei der Beantwortung der aufgeworfenen Fragen sind wir von unseren langjährigen Lehrerfahrungen im Fach Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler an der Technischen Universität Chemnitz–Zwickau ausgegangen und zu folgenden, in diesem Lehrbuch realisierten Positionen gekommen:

• **Mathematik muß verständlich, aber korrekt gelehrt werden.** Will heißen: Im Vordergrund steht der „Normalfall" einer Formel, eines Algorithmus, einer mathematischen Aussage; Sonderfälle, Entartungen, notwendige Voraussetzungen werden besprochen, aber nicht in den Vordergrund geschoben.

• **Ein Wirtschaftswissenschaftler soll Mathematik anwenden.** Will heißen: Er muß wissen, was Mathematik ist und kann. Er muß wichtige mathematische Begriffe kennen und sicher beherrschen. Er muß fundamentale Lösungsmethoden kennen und an kleinen Beispielen ausprobiert haben, um deren wichtigste Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten nutzen und ihre Grenzen einschätzen zu können. Er muß gewisse Fertigkeiten im Umgang mit der Mathematik als „Handwerkszeug" für wirtschaftswissenschaftliche Untersuchungen erwerben. Er soll aber nicht unbedingt die mathematische Theorie weiterentwickeln. Deshalb stehen auch die Demonstration mathematischer Aussagen an Beispielen im Vordergrund, während Beweise sehr kurz wegkommen und nur exemplarischen Einblick in mathematische Denkweisen gewähren. Ein Wirtschaftswissenschaftler muß sich aber dessen bewußt sein, daß man Mathematik niemals bedenkenlos anwenden darf, daß man — wie in jeder Wissenschaft — an bestimmte Gültigkeitsvoraussetzungen gebunden ist.

• **Die Anwendung mathematischer Methoden in Wirtschaftswissenschaft und –praxis geht vom Wirtschaftswissenschaftler aus.** Will heißen: Der zukünftige Absolvent muß neben profunder Kenntnis seines Faches und grundlegenden Kenntnissen in Mathematik in der Lage sein, ökonomische Probleme in der Sprache der Mathematik zu formulieren, er muß abschätzen können, inwieweit die Mathematik zur Lösung oder Lösungsunterstützung des betreffenden Problems beitragen kann, und er muß die mittels mathematischer Methoden erhaltenen Resultate ökonomisch interpretieren und umsetzen können. In der Praxis wird er hierbei natürlich vom Mathematiker nicht im Stich gelassen. Diesem Ziel dienen im Buch die Untersuchung der vielfältigsten wirtschaftswissenschaftlichen Fragestellungen und ihre Umsetzung in mathematische Formulierungen — kurzum, die Modellierung komplexer Sachverhalte.

• **Ein Wirtschaftswissenschaftler sollte von der Wichtigkeit der Mathematik überzeugt sein.** Will heißen: Er muß sehen, wo und wie ihm mathematische Lösungsmethoden bei der Untersuchung der ihn interessierenden Fragen helfen können. Dieses Anliegen wird im Buch dadurch realisiert, daß die behandelten mathematischen Themen an vielen Anwendungsbeispielen illustriert werden und daß großer Wert auf die Interpretation der erzielten Ergebnisse gelegt wird.

Die Darlegungen des Buches berücksichtigen natürlich, daß ein Student im 1. Semester noch kein fertig ausgebildeter Wirtschaftswissenschaftler ist. Deshalb werden sehr spezielle Fachtermini vermieden. Zur Anregung der selbständigen Beschäftigung mit dem behandelten Stoff werden dafür eine große Zahl an Übungsaufgaben gestellt, von denen in der Regel auch die Lösungen im Anhang zu finden sind. Schließlich ist die Vielzahl im Buch enthaltener Abbildungen dazu gedacht, das Vorstellungsvermögen anzuregen und zu verbessern.

Das vorliegende Lehrbuch vereint gewissermaßen **drei Bücher in einem**: einen **Vorkurs** zum Erwerb oder zur Festigung von Abiturkenntnissen, den eigentlichen **Grundkurs** Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, der die Gebiete Lineare Algebra, Lineare Optimierung und Analysis mehrerer Veränderlicher umfaßt, sowie eine relativ umfangreiche Einführung in die **Finanzmathematik**. Nicht unerwähnt sollte bleiben, daß das Buch so angelegt ist, daß es sich auch vorzüglich zum Selbststudium eignet.

Erfreulicherweise stieß die erste Ausgabe auf eine rege Nachfrage, so daß bereits nach relativ kurzer Zeit eine neue Auflage notwendig wurde. Wesentliche inhaltliche Änderungen erschienen uns dabei nicht erforderlich, jedoch haben wir das gesamte Buch einer nochmaligen kritischen Durchsicht unterzogen und einige Schreibfehler korrigiert.

Die berechtigten Wünsche vieler Studenten nach noch mehr Übungsaufgaben veranlaßten uns, ein entsprechendes **Ergänzungsbuch** herauszubringen, das mit seiner Fülle von komplett durchgerechneten und ausführlich kommentierten typischen Beispielen, Formeln und anwendungsbezogenen Aufgaben (mit Lösungen im Anhang!) den interessierten Leser Schritt für Schritt zur praktischen Beherrschung des Lehrbuchstoffes befähigt:

> Luderer, B., Paape, C. und Würker U.: Arbeits- und Übungsbuch Wirtschaftsmathematik, Beispiele — Aufgaben — Formeln, B. G. Teubner Stuttgart 1996, ISBN 3-519-02573-6.

Wir hoffen auf weitere positive Aufnahme des Lehrbuches durch die Leser und sind für konstruktive Hinweise und Anregungen, die zu seiner Verbesserung beitragen, dankbar.

Bernd Luderer, Uwe Würker

Chemnitz, Januar 1997

Inhaltsverzeichnis

Zeichenerklärung

$\mathbb{N}$	–	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	–	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	–	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	–	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	–	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	–	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}^n$	–	Menge der n-dimensionalen Vektoren bzw. n-Tupel reeller Zahlen
$\lvert x\rvert$	–	absoluter Betrag der reellen Zahl x
$\lVert x\rVert$	–	Norm des Vektors x
$\overset{!}{=}$; $\overset{\text{def}}{=}$	–	Gleichheit per Forderung; Gleichheit per Definition
$\Longleftrightarrow$	–	Äquivalenz von Aussagen; genau dann, wenn
$\Longrightarrow$	–	Implikation; aus ... folgt ...
$\forall$	–	für alle; für beliebige
$\exists$	–	es existiert; es gibt
$\emptyset$	–	leere Menge
$\{x \mid E(x)\}$	–	Menge aller Elemente x mit der Eigenschaft $E(x)$
p	–	Zinssatz, Zinsfuß
i	–	Zinsrate; imaginäre Einheit
q	–	Aufzinsungsfaktor
K_t	–	Kapital zum Zeitpunkt t
B_n^{vor}, B_n^{nach}	–	Barwert der vorschüssigen (nachschüssigen) Rente
E_n^{vor}, E_n^{nach}	–	Endwert der vorschüssigen (nachschüssigen) Rente
S_k	–	Restschuld am Ende der k-ten Periode
A_k	–	Annuität in der k-ten Periode
Z_k	–	Zinsen in der k-ten Periode
T_k	–	Tilgung in der k-ten Periode
A^{-1}	–	inverse Matrix
$A^\top$	–	transponierte Matrix
$\operatorname{rang} A$	–	Rang der Matrix A
$\det A$, $\lvert A\rvert$	–	Determinante der Matrix A
$\langle a, b\rangle$	–	Skalarprodukt der Vektoren a und b
E, e_j	–	Einheitsmatrix, j-ter Einheitsvektor
x_B, x_N	–	Vektor der Basisvariablen (Nichtbasisvariablen)
Δ_j	–	Optimalitätsindikatoren
$\frac{\partial f}{\partial x_j}$, f_{x_j}	–	partielle Ableitungen erster Ordnung
$\nabla f(x)$	–	Gradient der Funktion f im Punkt x
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$, $f_{x_i x_j}$	–	partielle Ableitungen zweiter Ordnung
$H_f(x)$	–	Hessematrix der Funktion f im Punkt x
ε_{f,x_i}	–	(partielle) Elastizität von f