

Teubner Studienbücher Mathematik

Bernd Luderer, Uwe Würker

Einstieg in die Wirtschaftsmathematik

Bernd Luderer, Uwe Würker

Einstieg in die Wirtschaftsmathematik

5., überarbeitete und erweiterte Auflage



Teubner

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Prof. Dr. rer. nat. habil. Bernd Luderer

Geboren 1949 in Chemnitz. Von 1967 bis 1972 Studium der Mathematik, 1972 Diplom an der TH Karl-Marx-Stadt. Von 1972 bis 1975 Aspirantur, 1976 Promotion an der Lomonossow-Universität Moskau. 1975 wiss. Assistent, 1979 Oberassistent TU Karl-Marx-Stadt. Studienaufenthalte 1980 Banachzentrum Warschau, 1983 Lomonossow-Universität Moskau. 1988 Habilitation, 1989 Dozent, 1992 Professor TU Chemnitz.

Internet: www.tu-chemnitz.de/~belud

E-Mail: b.luderer@mathematik.tu-chemnitz.de

PD Dr. rer. nat. habil. Uwe Würker

Geboren 1963 in Glauchau/Sa. Von 1982 bis 1987 Studium der Mathematik, 1987 Diplom an der TU Karl-Marx-Stadt. Von 1987 bis 1990 Forschungsstudium, 1990 bis 1999 wiss. Assistent an der TU Chemnitz, 1991 Promotion, 2001 Habilitation. Seit 1999 Projektleiter an der Sächsischen Landesanstalt für Landwirtschaft.

1. Auflage 1995
2. Auflage 1997
4. Auflage 2001
- 5., überarbeitete und erweiterte Auflage November 2003

Alle Rechte vorbehalten

© B. G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2003

www.teubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

ISBN 978-3-519-42098-9

ISBN 978-3-322-91822-2 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-91822-2

Vorwort zur 5. Auflage

Mathematik als propädeutisches Fach am Beginn eines wirtschaftswissenschaftlichen Studiums: Was soll gelehrt werden? Wie soll gelehrt werden? Wie umfangreich darf oder muß der Inhalt sein? So viele Personen, so viele Meinungen. Bei der Konzeption des vorliegenden Buches und somit bei der Beantwortung der aufgeworfenen Fragen sind wir von unseren langjährigen Lehrerfahrungen im Fach Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler an der TU Chemnitz ausgegangen und zu den im Folgenden realisierten Positionen gekommen:

- **Mathematik muss verständlich, aber korrekt gelehrt werden.** Will heißen: Im Vordergrund steht der „Normalfall“ einer Formel, eines Algorithmus, einer mathematischen Aussage; Sonderfälle, Entartungen, notwendige Voraussetzungen werden besprochen, aber nicht in den Vordergrund geschoben.

- **Ein Wirtschaftswissenschaftler soll Mathematik anwenden.** Will heißen: Er muss wissen, was Mathematik ist und kann. Er muss wichtige mathematische Begriffe kennen und sicher beherrschen, fundamentale Lösungsmethoden kennen und an kleinen Beispielen ausprobiert haben, um deren Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten nutzen und ihre Grenzen einschätzen zu können. Er muss Fertigkeiten im Umgang mit der Mathematik als „Handwerkszeug“ für wirtschaftswissenschaftliche Untersuchungen erwerben. Deshalb steht auch die Demonstration mathematischer Aussagen an Beispielen im Vordergrund, während Beweise sehr kurz wegkommen und nur exemplarischen Einblick in mathematische Denkweisen gewähren. Ein Wirtschaftswissenschaftler muss sich aber dessen bewusst sein, dass man Mathematik niemals bedenkenlos anwenden darf, dass man – wie in jeder Wissenschaft – an bestimmte Gültigkeitsvoraussetzungen gebunden ist.

- **Die Anwendung mathematischer Methoden in Wirtschaftswissenschaft und –praxis geht vom Wirtschaftswissenschaftler aus.** Will heißen: Der zukünftige Absolvent muss neben profunder Kenntnis seines Faches auch Basiswissen in Mathematik besitzen und in der Lage sein, ökonomische Probleme in der Sprache der Mathematik zu formulieren, er muss abschätzen können, inwieweit die Mathematik zur Lösung oder Lösungsunterstützung des betreffenden Problems beitragen kann, und er muss die mittels mathematischer Methoden erhaltenen Resultate ökonomisch interpretieren und umsetzen können. In der Praxis wird er hierbei natürlich vom Mathematiker nicht im Stich gelassen. Diesem Ziel dienen im Buch die Untersuchung der vielfältigsten Fragestellungen und ihre Umsetzung in die Sprache der Mathematik – kurzum, die Modellierung komplexer Sachverhalte.

- **Ein Wirtschaftswissenschaftler sollte von der Wichtigkeit der Mathematik überzeugt sein.** Will heißen: Er muss sehen, wo und wie ihm mathematische Lösungsmethoden bei der Untersuchung der ihn interessierenden Fragen helfen können. Dieses Anliegen wird im Buch dadurch realisiert, dass die behandelten mathematischen Themen an vielen Anwendungsbeispielen il-

lustriert werden und dass großer Wert auf die Interpretation der erzielten Ergebnisse gelegt wird.

Die Darlegungen des Buches berücksichtigen natürlich, dass ein Student im ersten Semester noch kein fertig ausgebildeter Wirtschaftswissenschaftler ist. Deshalb werden sehr spezielle Termini vermieden. Zur Anregung der selbstständigen Beschäftigung mit dem behandelten Stoff werden viele Übungsaufgaben gestellt, von denen in der Regel auch die Lösungen am Ende des Buches zu finden sind. Schließlich ist die Vielzahl von Abbildungen dazu gedacht, das Vorstellungsvermögen anzuregen und zu verbessern.

Das vorliegende Lehrbuch vereint gewissermaßen **drei Bücher in einem**: einen **Vorkurs** zum Erwerb oder zur Festigung von Abiturkenntnissen, den eigentlichen **Grundkurs** Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, der die Gebiete Lineare Algebra, Lineare Optimierung und Analysis mehrerer Veränderlicher umfasst, sowie eine relativ umfangreiche Einführung in die **Finanzmathematik**. Nicht unerwähnt sollte bleiben, dass das Buch so angelegt ist, dass es sich auch vorzüglich zum Selbststudium eignet.

Gegenüber der vorhergehenden Auflage gibt es eine ganze Reihe von Änderungen und Ergänzungen: Abschnitte zur Taylorentwicklung von Funktionen, zur Cramerschen Regel und der Darstellung der inversen Matrix sowie zu linearen Differenzialgleichungen wurden aufgenommen, die Abschnitte zu Folgen und Reihen, zur Methode der kleinsten Quadratsumme, zu den L'Hospital'schen Regeln und zu Wachstumsbegriffen wurden überarbeitet und erweitert. Im Interesse einer besseren Lesbarkeit wurde das Layout neu gestaltet. Ferner erfolgte eine Umstellung auf die neue Rechtschreibung sowie auf Euro. Schließlich haben wir das gesamte Buch wiederum einer kritischen Durchsicht unterzogen und etliche Ungenauigkeiten beseitigt.

Ergänzend zum vorliegenden Lehrbuch sind eine umfangreiche Aufgabensammlung, ein etwas kürzer gehaltenes Buch zur Klausurvorbereitung sowie eine Formelsammlung verfügbar:

Luderer, B., Paape, C. und Würker U.: Arbeits- und Übungsbuch Wirtschaftsmathematik, Beispiele – Aufgaben – Formeln (3. Auflage), Teubner, Stuttgart 2002,

Luderer, B.: Klausurtraining Mathematik und Statistik für Wirtschaftswissenschaftler (2. Auflage), Teubner, Stuttgart 2003,

Luderer, B., Nollau, V., und Veters, K.: Mathematische Formeln für Wirtschaftswissenschaftler (4. Auflage), Teubner, Stuttgart 2002.

Unser besonderer Dank gilt dem Teubner-Verlag und Herrn J. Weiß, Leipzig, für die konstruktive und angenehme Zusammenarbeit. Wir hoffen auf weitere positive Aufnahme des Lehrbuches durch die Leser und sind für Hinweise und Anregungen zu seiner Verbesserung dankbar.

Inhaltsverzeichnis

Zeichenerklärung	13
1 Grundlagen	15
1.1 Instrumente der Elementarmathematik	15
1.1.1 Zahlbereiche. Zahlendarstellung	15
1.1.2 Rechnen mit Zahlen	17
1.1.3 Bruchrechnung	20
1.1.4 Potenzrechnung	22
1.1.5 Binomische Formeln. Partialdivision	24
1.1.6 Wurzelrechnung	28
1.1.7 Logarithmenrechnung	30
1.1.8 Rechenregeln und Auflösung von Gleichungen	31
1.1.9 Koordinatensysteme	35
1.1.10 Winkelbeziehungen	38
1.1.11 Komplexe Zahlen	38
1.2 Darstellung von Funktionen einer Variablen	40
1.2.1 Formen der Darstellung	42
1.2.2 Operationen mit Funktionen	43
1.2.3 Wichtige spezielle Funktionen	47
1.3 Ergänzende Fragen	59
1.3.1 Intervalle	59
1.3.2 Auflösung von Ungleichungen	61
1.3.3 Absolute Beträge	62
1.4 Analytische Geometrie	64
1.4.1 Geradengleichungen in der Ebene	65
1.4.2 Geraden und Ebenen im Raum	70
1.4.3 Grafische Darstellung von Ungleichungssystemen	72
1.5 Zahlenfolgen und Zahlenreihen	74
1.5.1 Grundbegriffe	74
1.5.2 Arithmetische Folgen und Reihen	76
1.5.3 Geometrische Folgen und Reihen	77
1.5.4 Grenzwerte von Zahlenfolgen	78
1.5.5 Konvergenz von Reihen	82

2	Logik und Mengenlehre	83
2.1	Aussagenlogik	83
2.1.1	Aussagen	83
2.1.2	Aussagenverbindungen	85
2.1.3	Quantoren	88
2.1.4	Einfache Schlussweisen	89
2.2	Mengenlehre	91
2.2.1	Grundbegriffe	91
2.2.2	Mengenrelationen	93
2.2.3	Mengenoperationen	94
2.2.4	Abbildungen und Funktionen	96
3	Finanzmathematik	99
3.1	Zins- und Zinseszinsrechnung	99
3.1.1	Einfache Verzinsung	100
3.1.2	Zinseszinsrechnung	103
3.1.3	Grundaufgaben der Zinseszinsrechnung	104
3.1.4	Methoden der mehrperiodigen Investitionsrechnung	106
3.1.5	Gemischte Verzinsung	108
3.1.6	Unterjährige Verzinsung	109
3.2	Rentenrechnung	111
3.2.1	Grundbegriffe der Rentenrechnung	111
3.2.2	Vorschüssige Renten	112
3.2.3	Nachschüssige Renten	113
3.2.4	Grundaufgaben der Rentenrechnung	115
3.2.5	Ewige Rente	117
3.3	Tilgungsrechnung	119
3.3.1	Grundbegriffe. Formen der Tilgung	119
3.3.2	Ratentilgung	120
3.3.3	Annuitätentilgung	120
3.3.4	Tilgungspläne	122
3.4	Renditerechnung	124

4	Lineare Algebra	129
4.1	Matrizen. Vektoren. Vektorräume	129
4.1.1	Begriff der Matrix	129
4.1.2	Spezielle Matrizen	130
4.1.3	Matrizenrelationen	132
4.1.4	Operationen mit Matrizen	134
4.1.5	Lineare Vektorräume	136
4.2	Matrizenmultiplikation	138
4.2.1	Skalarprodukt	138
4.2.2	Produkt von Matrizen	139
4.2.3	Eigenschaften der Matrizenmultiplikation	141
4.2.4	Anwendungen der Matrizenmultiplikation	142
4.3	Lineare Gleichungssysteme (LGS)	148
4.3.1	Begriff des linearen Gleichungssystems	149
4.3.2	Darstellungsformen von LGS	150
4.3.3	Begriff der Lösung eines LGS	151
4.3.4	Lineare Gleichungssysteme mit Einheitsmatrix	154
4.3.5	Elementare Umformungen eines LGS	155
4.4	Gauß'scher Algorithmus	156
4.4.1	Anwendung elementarer Umformungen	156
4.4.2	Ablaufplan des Gauß'schen Algorithmus	160
4.4.3	Lösungsdarstellung	161
4.4.4	Numerische Aspekte	163
4.4.5	Zusammenfassende Bemerkungen	164
4.5	Lineare Unabhängigkeit	167
4.5.1	Linearkombination	167
4.5.2	Begriff der linearen Unabhängigkeit	170
4.5.3	Basis und Rang	172
4.5.4	Zur Lösungsstruktur linearer Gleichungssysteme	176
4.6	Matrizeninversion	177
4.6.1	Definition der inversen Matrix	177
4.6.2	Anwendungen der Matrizeninversion	181
4.7	Determinanten	186
4.7.1	Definition der Determinante	186
4.7.2	Eigenschaften von Determinanten	189

4.7.3	Anwendungen der Determinantenrechnung	192
4.7.4	Definitheit von Matrizen	194
4.7.5	Die Cramer'sche Regel	196
4.7.6	Zusammenfassende Bemerkungen	197
5	Lineare Optimierung	199
5.1	Gegenstand der linearen Optimierung	200
5.1.1	Betrachtung einer Modellsituation	201
5.1.2	Bestandteile einer LOA. Lösungsbegriff	202
5.2	Modellierung und grafische Lösung von LOA	204
5.2.1	Modellierung typischer Problemstellungen	205
5.2.2	Grafische Lösung von LOA	211
5.3	Theorie der linearen Optimierung	221
5.3.1	Überführung in die Gleichungsform	221
5.3.2	Basislösungen und Eckpunkte	226
5.3.3	Eigenschaften von LOA	229
5.4	Simplexmethode für Optimierungsaufgaben in Gleichungsform . .	230
5.4.1	Grundidee	230
5.4.2	Auswahl der aufzunehmenden Basisvariablen	234
5.4.3	Auswahl der auszuschließenden Basisvariablen	235
5.4.4	Ablaufplan des Simplexalgorithmus	237
5.4.5	Beispiele. Rechenkontrollen	241
5.4.6	Sonderfälle	244
5.5	Zwei-Phasen-Methode	248
5.5.1	Grundidee	248
5.5.2	Mögliche Fälle	250
5.5.3	Beispiele	252
5.6	Dualität in der linearen Optimierung	254
5.6.1	Konstruktion der dualen Aufgabe	254
5.6.2	Dualitätsbeziehungen	257
5.6.3	Ökonomische Interpretation der Dualvariablen	259

6	Differenzialrechnung für Funktionen einer Variablen	266
6.1	Grenzwert und Stetigkeit	266
6.1.1	Grenzwert von Funktionen	267
6.1.2	Stetigkeit von Funktionen	270
6.1.3	Eigenschaften stetiger Funktionen	271
6.2	Die Ableitung einer Funktion	272
6.2.1	Das Tangentenproblem	274
6.2.2	Differenzial	277
6.2.3	Differenziationsregeln	279
6.2.4	Höhere Ableitungen	282
6.2.5	Taylor-Entwicklung einer Funktion	283
6.3	Untersuchung von Funktionen mit Hilfe von Ableitungen	287
6.3.1	Monotonie und Beschränktheit	288
6.3.2	Extremwerte	290
6.3.3	Wendepunkte, Krümmungsverhalten	295
6.3.4	Kurvendiskussion	299
6.3.5	Beispiele zur Kurvendiskussion	302
6.3.6	Anwendungen in der Marginalanalyse	305
6.4	Numerische Methoden der Nullstellenberechnung	311
6.4.1	Intervallhalbierung	313
6.4.2	Sekantenverfahren, Regula Falsi	314
6.4.3	Newton-Verfahren	316
7	Funktionen mehrerer Veränderlicher	318
7.1	Begriff und Beispiele	318
7.1.1	Funktionsbegriff	318
7.1.2	Beispiele für Funktionen mehrerer Veränderlicher	320
7.2	Grenzwert und Stetigkeit	323
7.3	Differenziation von Funktionen mehrerer Veränderlicher	329
7.3.1	Begriff der Differenzierbarkeit	329
7.3.2	Partielle Ableitungen und Elastizitäten	330
7.3.3	Gradient einer Funktion, Verschiedene Interpretationen	334
7.3.4	Partielle Ableitungen höherer Ordnung, Hesse-Matrix	338
7.3.5	Vollständiges Differenzial	339
7.3.6	Implizite Funktionen	342

8	Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher	347
8.1	Extremwerte ohne Nebenbedingungen	347
8.1.1	Notwendige und hinreichende Extremwertbedingungen . .	348
8.1.2	Beispiele	352
8.2	Extremwerte unter Nebenbedingungen	354
8.2.1	Allgemeine Aufgabenformulierung	355
8.2.2	Die Eliminationsmethode	356
8.2.3	Die Lagrange-Methode	363
8.2.4	Interpretation der Lagrange'schen Multiplikatoren	370
8.3	Methode der kleinsten Quadratsumme	372
8.3.1	Problemstellung. Lineare Regression	372
8.3.2	Allgemeinere Ansatzfunktionen	379
9	Integralrechnung	383
9.1	Das unbestimmte Integral	384
9.1.1	Integration von Funktionen einer Veränderlichen	384
9.1.2	Integrationsregeln	385
9.2	Das bestimmte Integral	387
9.2.1	Integralbegriff für Funktionen einer Variablen	387
9.2.2	Integrierbarkeit. Eigenschaften bestimmter Integrale . . .	390
9.2.3	Numerische Integration	392
9.2.4	Uneigentliche Integrale	394
9.2.5	Doppelintegral	396
9.3	Anwendungen der Integralrechnung	399
9.3.1	Untersuchung von Wachstumsprozessen	400
9.3.2	Kurzer Ausblick auf Differenzialgleichungen	403
	Lösungen zu den Aufgaben	405
	Klausurbeispiel	425
	Literaturverzeichnis	431
	Sachwortverzeichnis	432

Zeichenerklärung

\mathbb{N}	- Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{Z}	- Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{Q}	- Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{R}	- Menge der reellen Zahlen
\mathbb{C}	- Menge der komplexen Zahlen
\mathbb{R}^+	- Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
\mathbb{R}^n	- Menge der n -dimensionalen Vektoren bzw. n -Tupel reeller Zahlen
$ x $	- absoluter Betrag der reellen Zahl x
$\ x\ $	- Norm des Vektors x
$\stackrel{!}{=}$	- Gleichheit per Forderung
$\stackrel{\text{def}}{=}$	- Gleichheit per Definition
\iff	- Äquivalenz von Aussagen; genau dann, wenn
\implies	- Implikation; aus ... folgt ...
\forall	- für alle; für beliebige
\exists	- es existiert; es gibt
\emptyset	- leere Menge
$\{x \mid E(x)\}$	- Menge aller Elemente x mit der Eigenschaft $E(x)$
e	- Euler'sche Zahl
i	- imaginäre Einheit
p	- Zinssatz, Zinsfuß
i	- Zinsrate, $i = \frac{p}{100}$
q	- Aufzinsungsfaktor, $q = 1 + i$
K_t	- Kapital zum Zeitpunkt t
B_n^{vor}	- Barwert der vorschüssigen Rente
B_n^{nach}	- Barwert der nachschüssigen Rente
E_n^{vor}	- Endwert der vorschüssigen Rente
E_n^{nach}	- Endwert der nachschüssigen Rente

S_k	- Restschuld am Ende der k -ten Periode
A_k	- Annuität in der k -ten Periode
Z_k	- Zinsen in der k -ten Periode
T_k	- Tilgung in der k -ten Periode
A^{-1}	- inverse Matrix
A^\top	- transponierte Matrix
rang A	- Rang der Matrix A
$\det A, A $	- Determinante der Matrix A
$\langle a, b \rangle$	- Skalarprodukt der Vektoren a und b
E	- Einheitsmatrix
e_j	- j -ter Einheitsvektor
x_B	- Vektor der Basisvariablen
x_N	- Vektor der Nichtbasisvariablen
c	- Vektor der Zielfunktionskoeffizienten
c_B	- Vektor der Zielfunktionskoeffizienten der Basisvariablen
Δ_j	- Optimalitätsindikatoren
$\frac{\partial f}{\partial x_j}, f_{x_j}$	- partielle Ableitungen erster Ordnung
$\nabla f(x)$	- Gradient der Funktion f im Punkt x
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, f_{x_i x_j}$	- partielle Ableitungen zweiter Ordnung
$H_f(x)$	- Hessematrix der Funktion f im Punkt x
$L(x, \lambda)$	- Lagrangefunktion
$\varepsilon_{f,x}$	- (Punkt-) Elastizität der Funktion f im Punkt x
ε_{f,x_i}	- partielle Elastizität von f bezüglich x_i
$w(t, f)$	- Wachstumstempo der Funktion f im Zeitpunkt t