Teubner Studienbücher Mathematik

Bernd Luderer, Uwe Würker

Einstieg in die Wirtschaftsmathematik

Bernd Luderer, Uwe Würker

Einstieg in die Wirtschaftsmathematik

5., überarbeitete und erweiterte Auflage

Teubner

B. G. Teubner Stuttgart · Leipzig · Wiesbaden

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Prof. Dr. rer. nat. habil. Bernd Luderer
Geboren 1949 in Chemnitz. Von 1967 bis 1972 Studium der Mathematik, 1972 Diplom an der TH Karl-Marx-Stadt. Von 1972 bis 1975 Aspirantur, 1976 Promotion an der Lomonossow-Universität Moskau. 1975 wiss. Assistent, 1979 Oberassistent TU Karl-Marx-Stadt. Studienaufenthalte 1980 Banach-zentrum Warschau, 1983 Lomonossow-Universität Moskau. 1988 Habilitation, 1989 Dozent, 1992 Professor TU Chemnitz.
Internet: www.tu-chemnitz.de/~belud
E-Mail: b.luderer@mathematik.tu-chemnitz.de

PD Dr. rer. nat. habil. Uwe Würker
Geboren 1963 in Glauchau/Sa. Von 1982 bis 1987 Studium der Mathematik, 1987 Diplom an der TU Karl-Marx-Stadt. Von 1987 bis 1990 Forschungsstudium, 1990 bis 1999 wiss. Assistent an der TU Chemnitz, 1991 Promotion, 2001 Habilitation. Seit 1999 Projektleiter an der Sächsischen Landes-anstalt für Landwirtschaft.

1. Auflage 1995
2. Auflage 1997
4. Auflage 2001
5., überarbeitete und erweiterte Auflage November 2003

www.teubner.de

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

ISBN 978-3-519-42098-9 ISBN 978-3-322-91822-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-91822-2

Vorwort zur 5. Auflage

Mathematik als propädeutisches Fach am Beginn eines wirtschaftswissenschaftlichen Studiums: Was soll gelehrt werden? Wie soll gelehrt werden? Wie umfangreich darf oder muß der Inhalt sein? So viele Personen, so viele Meinungen. Bei der Konzeption des vorliegenden Buches und somit bei der Beantwortung der aufgeworfenen Fragen sind wir von unseren langjährigen Lehrerfahrungen im Fach Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler an der TU Chemnitz ausgegangen und zu den im Folgenden realisierten Positionen gekommen:

• **Mathematik muss verständlich, aber korrekt gelehrt werden.** Will heißen: Im Vordergrund steht der „Normalfall" einer Formel, eines Algorithmus, einer mathematischen Aussage; Sonderfälle, Entartungen, notwendige Voraussetzungen werden besprochen, aber nicht in den Vordergrund geschoben.

• **Ein Wirtschaftswissenschaftler soll Mathematik anwenden.** Will heißen: Er muss wissen, was Mathematik ist und kann. Er muss wichtige mathematische Begriffe kennen und sicher beherrschen, fundamentale Lösungsmethoden kennen und an kleinen Beispielen ausprobiert haben, um deren Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten nutzen und ihre Grenzen einschätzen zu können. Er muss Fertigkeiten im Umgang mit der Mathematik als „Handwerkszeug" für wirtschaftswissenschaftliche Untersuchungen erwerben. Deshalb steht auch die Demonstration mathematischer Aussagen an Beispielen im Vordergrund, während Beweise sehr kurz wegkommen und nur exemplarischen Einblick in mathematische Denkweisen gewähren. Ein Wirtschaftswissenschaftler muss sich aber dessen bewusst sein, dass man Mathematik niemals bedenkenlos anwenden darf, dass man – wie in jeder Wissenschaft – an bestimmte Gültigkeitsvoraussetzungen gebunden ist.

• **Die Anwendung mathematischer Methoden in Wirtschaftswissenschaft und –praxis geht vom Wirtschaftswissenschaftler aus.** Will heißen: Der zukünftige Absolvent muss neben profunder Kenntnis seines Faches auch Basiswissen in Mathematik besitzen und in der Lage sein, ökonomische Probleme in der Sprache der Mathematik zu formulieren, er muss abschätzen können, inwieweit die Mathematik zur Lösung oder Lösungsunterstützung des betreffenden Problems beitragen kann, und er muss die mittels mathematischer Methoden erhaltenen Resultate ökonomisch interpretieren und umsetzen können. In der Praxis wird er hierbei natürlich vom Mathematiker nicht im Stich gelassen. Diesem Ziel dienen im Buch die Untersuchung der vielfältigsten Fragestellungen und ihre Umsetzung in die Sprache der Mathematik – kurzum, die Modellierung komplexer Sachverhalte.

• **Ein Wirtschaftswissenschaftler sollte von der Wichtigkeit der Mathematik überzeugt sein.** Will heißen: Er muss sehen, wo und wie ihm mathematische Lösungsmethoden bei der Untersuchung der ihn interessierenden Fragen helfen können. Dieses Anliegen wird im Buch dadurch realisiert, dass die behandelten mathematischen Themen an vielen Anwendungsbeispielen illustriert werden und dass großer Wert auf die Interpretation der erzielten Ergebnisse gelegt wird.

Die Darlegungen des Buches berücksichtigen natürlich, dass ein Student im ersten Semester noch kein fertig ausgebildeter Wirtschaftswissenschaftler ist. Deshalb werden sehr spezielle Termini vermieden. Zur Anregung der selbstständigen Beschäftigung mit dem behandelten Stoff werden viele Übungsaufgaben gestellt, von denen in der Regel auch die Lösungen am Ende des Buches zu finden sind. Schließlich ist die Vielzahl von Abbildungen dazu gedacht, das Vorstellungsvermögen anzuregen und zu verbessern.

Das vorliegende Lehrbuch vereint gewissermaßen **drei Bücher in einem**: einen **Vorkurs** zum Erwerb oder zur Festigung von Abiturkenntnissen, den eigentlichen **Grundkurs** Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, der die Gebiete Lineare Algebra, Lineare Optimierung und Analysis mehrerer Veränderlicher umfasst, sowie eine relativ umfangreiche Einführung in die **Finanzmathematik**. Nicht unerwähnt sollte bleiben, dass das Buch so angelegt ist, dass es sich auch vorzüglich zum Selbststudium eignet.

Gegenüber der vorhergehenden Auflage gibt es eine ganze Reihe von Änderungen und Ergänzungen: Abschnitte zur Taylorentwicklung von Funktionen, zur Cramerschen Regel und der Darstellung der inversen Matrix sowie zu linearen Differenzialgleichungen wurden aufgenommen, die Abschnitte zu Folgen und Reihen, zur Methode der kleinsten Quadratsumme, zu den L'Hospitalschen Regeln und zu Wachstumsbegriffen wurden überarbeitet und erweitert. Im Interesse einer besseren Lesbarkeit wurde das Layout neu gestaltet. Ferner erfolgte eine Umstellung auf die neue Rechtschreibung sowie auf Euro. Schließlich haben wir das gesamte Buch wiederum einer kritischen Durchsicht unterzogen und etliche Ungenauigkeiten beseitigt.

Ergänzend zum vorliegenden Lehrbuch sind eine umfangreiche Aufgabensammlung, ein etwas kürzer gehaltenes Buch zur Klausurvorbereitung sowie eine Formelsammlung verfügbar:

> Luderer, B., Paape, C. und Würker U.: Arbeits- und Übungsbuch Wirtschaftsmathematik, Beispiele – Aufgaben – Formeln (3. Auflage), Teubner, Stuttgart 2002,
>
> Luderer, B.: Klausurtraining Mathematik und Statistik für Wirtschaftswissenschaftler (2. Auflage), Teubner, Stuttgart 2003,
>
> Luderer, B., Nollau, V., und Vetters, K.: Mathematische Formeln für Wirtschaftswissenschaftler (4. Auflage), Teubner, Stuttgart 2002.

Unser besonderer Dank gilt dem Teubner-Verlag und Herrn J. Weiß, Leipzig, für die konstruktive und angenehme Zusammenarbeit. Wir hoffen auf weitere positive Aufnahme des Lehrbuches durch die Leser und sind für Hinweise und Anregungen zu seiner Verbesserung dankbar.

Chemnitz, im April 2003 Bernd Luderer, Uwe Würker

Inhaltsverzeichnis

Zeichenerklärung

$\mathbb{N}$	–	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	–	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	–	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	–	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	–	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	–	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}^n$	–	Menge der n-dimensionalen Vektoren bzw. n-Tupel reeller Zahlen
$\lvert x\rvert$	–	absoluter Betrag der reellen Zahl x
$\lVert x\rVert$	–	Norm des Vektors x
$\stackrel{!}{=}$	–	Gleichheit per Forderung
$\stackrel{\text{def}}{=}$	–	Gleichheit per Definition
$\Longleftrightarrow$	–	Äquivalenz von Aussagen; genau dann, wenn
$\Longrightarrow$	–	Implikation; aus ... folgt ...
$\forall$	–	für alle; für beliebige
$\exists$	–	es existiert; es gibt
$\emptyset$	–	leere Menge
$\{x \mid E(x)\}$	–	Menge aller Elemente x mit der Eigenschaft $E(x)$
e	–	Euler'sche Zahl
i	–	imaginäre Einheit
p	–	Zinssatz, Zinsfuß
i	–	Zinsrate, $i = \frac{p}{100}$
q	–	Aufzinsungsfaktor, $q = 1 + i$
K_t	–	Kapital zum Zeitpunkt t
B_n^{vor}	–	Barwert der vorschüssigen Rente
B_n^{nach}	–	Barwert der nachschüssigen Rente
E_n^{vor}	–	Endwert der vorschüssigen Rente
E_n^{nach}	–	Endwert der nachschüssigen Rente

S_k	– Restschuld am Ende der k-ten Periode
A_k	– Annuität in der k-ten Periode
Z_k	– Zinsen in der k-ten Periode
T_k	– Tilgung in der k-ten Periode
A^{-1}	– inverse Matrix
$A^\top$	– transponierte Matrix
$\operatorname{rang} A$	– Rang der Matrix A
$\det A$, $\|A\|$	– Determinante der Matrix A
$\langle a, b\rangle$	– Skalarprodukt der Vektoren a und b
E	– Einheitsmatrix
e_j	– j-ter Einheitsvektor
x_B	– Vektor der Basisvariablen
x_N	– Vektor der Nichtbasisvariablen
c	– Vektor der Zielfunktionskoeffizienten
c_B	– Vektor der Zielfunktionskoeffizienten der Basisvariablen
Δ_j	– Optimalitätsindikatoren
$\frac{\partial f}{\partial x_j}, f_{x_j}$	– partielle Ableitungen erster Ordnung
$\nabla f(x)$	– Gradient der Funktion f im Punkt x
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}, f_{x_i x_j}$	– partielle Ableitungen zweiter Ordnung
$H_f(x)$	– Hessematrix der Funktion f im Punkt x
$L(x, \lambda)$	– Lagrangefunktion
$\varepsilon_{f,x}$	– (Punkt-) Elastizität der Funktion f im Punkt x
ε_{f,x_i}	– partielle Elastizität von f bezüglich x_i
$w(t, f)$	– Wachstumstempo der Funktion f im Zeitpunkt t